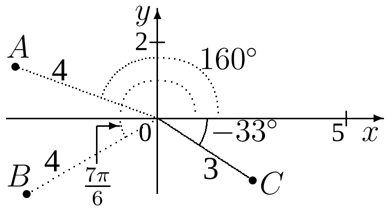
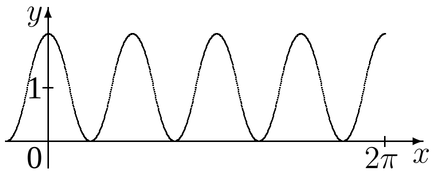
| 10. Klasse Übungsaufgaben | 10 |
|---|---|
| **Trigonometrische Funktionen** | **02** |

1. Berechnen Sie die $(x|y)$-Koordinaten der nebenstehenden Punkte (Taschenrechner, 1 Dezimale).




2. (a) Notieren Sie eine Wertetabelle, zeichnen Sie den Graphen und beobachten Sie, wie sich jeweils der Graph im Vergleich zur Funktionsgleichung $y = \cos x$ ändert:
   - $y = \cos x + 1$. Formulieren Sie: „$+1$“ bewirkt …
   - $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$. Formulieren Sie: „$+\frac{\pi}{2}$ beim $x$-Wert“ bewirkt …
   - $y = 2 \cdot \cos x$. Formulieren Sie: „$\cdot 2$“ bewirkt …
   - $y = \cos(2x)$. Formulieren Sie: „$\cdot 2$ beim $x$-Wert“ bewirkt …

   (b) Wie lautet eine Funktionsgleichung zum nebenstehenden Graphen?




Weitere Hinweise und Beispiele siehe grund108.pdf und ueb108.pdf.

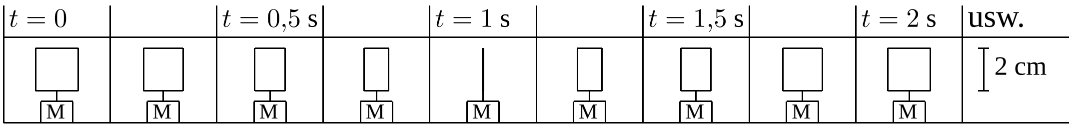
3. Geben Sie zu $y = 4\sin(5x) - 3$ die Periode und die erste positive Nullstelle an.

4. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen im Bereich $\varphi \in [-180°; 720°]$ (Teilaufgabe (a)) bzw. $x \in [-2\pi; 6\pi]$ (Teilaufgaben (b)–(c)):

   (a) $\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (b) $\sin(\frac{x}{2}) = 1$ (c) $\sin x = -2$

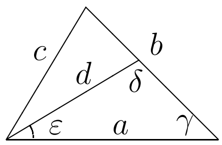
Weitere Beispiele siehe grun1010.pdf und ueb1010.pdf.

5. Ein Motor M dreht eine 2 cm x 2 cm große quadratische Platte mit konstanter Drehgeschwindigkeit $\omega = 90° \ \frac{1}{\mathrm{s}}$ (d. h. 90° pro Sekunde) bzw. im Bogenmaß $\omega = \frac{\pi}{2} \ \frac{1}{\mathrm{s}}$, so dass der Winkel $\varphi$ gegenüber der Ausgangslage zum Zeitpunkt $t$ gemäß $\varphi = \omega \cdot t$ beschrieben wird. Eine Serie mit 4 Fotos pro Sekunde würde dann so aussehen:




Die jeweils zum Zeitpunkt t auf dem Foto dargestellte Fläche soll durch eine Funktion $A(t)$ beschrieben werden. Notieren Sie einen Term für $A(t)$ und skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

6. (Im neuen Lehrplan nicht verbindlich.)
   Berechnen Sie im nebenstehenden allgemeinen Dreieck mit $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, $d = 4$ den Winkel $\delta$.



# 10. Klasse Lösungen — 10
# Trigonometrische Funktionen — 02

1. $A(4\cos 160°|4\sin 160°) \approx (-3{,}8|1{,}4)$ $\quad B(4\cos\frac{7\pi}{6}|4\sin\frac{7\pi}{6}) \approx (-3{,}5|-2)$
   $C(3\cos(-33°)|3\sin(-33°) \approx (2{,}5|-1{,}6)$

2. (a) $y = \cos x$

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $0$ | $-1$ |

Ausgangsfunktion

• $y = \cos x + 1$

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $1$ | $0$ |

„+1“ bewirkt: Verschiebung 1 nach oben

• $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

„$+\frac{\pi}{2}$ bei $x$“: Verschiebung $\frac{\pi}{2}$ nach links

• $y = 2\cdot\cos x$

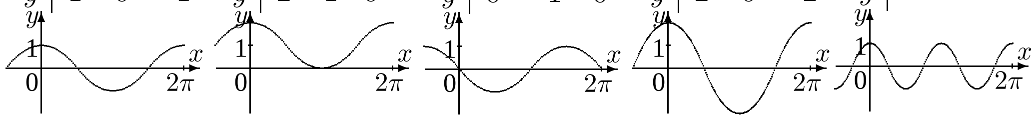
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $0$ | $-2$ |

„·2“ bewirkt: Streckung in $y$-Richtung

• $y = \cos(2\cdot x)$

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $-1$ | $1$ |

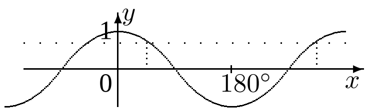
„·2 bei $x$“: Stauchung in $x$-Ri. auf halbe Periodenlänge




   (b) $y = \cos(4x) + 1$

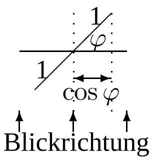
3. Periode $\frac{1}{5}\cdot 2\pi = \frac{2\pi}{5}$; Nullstelle: $4\sin(5x) - 3 = 0$; $\sin(5x) = \frac{3}{4}$; $5x \approx 0{,}85$; $x \approx 0{,}17$

4. (a) Taschenrechner (hier Gradmaß DEG, SHIFT-cos) liefert: $\varphi = 45°$.
   Skizze des Graphen liefert $315°$ als weitere Lösung. Weitere Lösungen $360°$-periodisch, also Lösungsmenge $\{-45°, 45°, 315°, 405°, 675°\}$



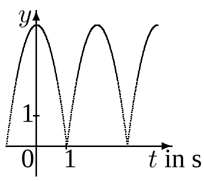

   (b) Mit der Substitution $u = \frac{x}{2}$ ist $\sin u = 1$, also $u = \frac{\pi}{2}$, $u = \frac{5\pi}{2}$, somit wegen $x = 2u$ Lösungsmenge $\{\pi; 5\pi\}$.
   
   (c) Da sin und cos nur Werte im Bereich $[-1; 1]$ annehmen, gibt es keine Lösung, d. h. Lösungsmenge leere Menge $\{\}$.

5. Ansicht von oben:




Maße der sichtbaren Fläche in cm: $2\cos\varphi$ breit, 2 hoch, also $A(t) = 2\cdot 2\cos\varphi = 4\cos(\omega t) = 4\cos(\frac{\pi}{2}t)$ bzw. Fläche besser mit Betrag: $A(t) = |4\cos(\frac{\pi}{2}t)|$ ($t$ in Sekunden).

Eine kleine Wertetabelle bzw. die Fotoserie zeigt, dass bei $t = 1$ die erste Nullstelle vorhanden ist:




6. Vorüberlegung: Zur Berechnung von $\delta$ muss man das untere Teildreieck betrachten und benötigt hier eine weitere Größe; hierfür bietet sich der Winkel $\gamma$ an, da dieser auch im ganzen Dreieck vorkommt und dort schon drei Seitenlängen bekannt sind. Von Sinussatz und Kosinussatz kommt hierfür nur der Kosinussatz in Frage, da er derjenige ist, in dem drei Seitenlängen vorkommen.
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{25+16-9}{2\cdot 5\cdot 4} = 0{,}8 \Rightarrow \gamma \approx 36{,}9°$$
Im unteren Teildreieck verwenden wir den Sinussatz (auch der Kosinussatz wäre möglich; dabei wäre dann eine quadratische Gleichung zu lösen).
$$\frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{a}{d} \Rightarrow \sin\delta = \frac{\sin\gamma\cdot a}{d} = 0{,}75 \Rightarrow \delta_1 \approx 48{,}6° \text{ oder } \delta_2 \approx 131{,}4°$$
Im ersteren Fall wäre (Winkelsumme im unteren Teildreieck) $\varepsilon \approx 94{,}5°$ der größte Winkel in diesem Dreieck; da dort $a$ die größte Seite ist, muss jedoch der $a$ gegenüberliegende Winkel $\delta$ der größte sein, also ist $\delta \approx 131{,}4°$.