10. Klasse Übungsaufgaben	**10**
Bedingte Wahrscheinlichkeit	**04**

1. Erstellen Sie eine 6-Felder-Tafel mit absoluten Häufigkeiten:
   28 Schülerinnen und 26 Schüler wählen eine Sportart. 14 Buben und Mädchen möchten Schwimmen, zwei Fünftel der übrigen Fußball spielen und der Rest laufen. Beim Fußball sind nur 2 Mädchen, dagegen beim Schwimmen nur 2 Buben.

   Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mädchen Fußball spielen möchte?
   Zeigen Sie, dass das Geschlecht einen Einfluss auf die Fußball-Leidenschaft hat.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand aus der Fußball-Gruppe aus der Gruppe der Mädchen stammt?

2. Die Tabelle beschreibe, wie viele von anfangs 100 Leuchtstoffröhren durchschnittlich nach t Tagen Brenndauer noch voll funktionsfähig sind.

t	0	100	200	300
Zahl	100	61	35	18

   (a) Wie groß ist demnach die Wahrscheinlichkeit, dass eine neue Leuchtstoffröhre weniger als 200 Tage überlebt?

   (b) Berechnen Sie für $b = 0, 100, 200$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Leuchtstoffröhre, die schon b Tage überlebt hat, die nächsten 100 Tage auch noch überlebt. Interpretieren Sie einen Vergleich dieser Daten.

3. Gegeben sind Ereignisse A, B mit $P(A) = 0{,}72$, $P(A \cap B) = 0{,}18$, $P(A \cup B) = 0{,}832$.
   Wie groß sind dann die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_B(A)$ und $P_{\overline{A}}(B)$?

4. (Aus dem Leistungskurs-Abitur Bayern 2008/IV)
   In einem Molkereibetrieb wird Fuchtjoghurt hergestellt und in Becher abgefüllt. In dem Betrieb werden täglich gleich viele Becher der Sorten Erdbeere, Kirsche, Heidelbeere und Ananas abgefüllt. Bei einer Tagesproduktion, bei der 4 % der Becher einen defekten Deckel aufweisen, fällt auf, dass unter den Erdbeerjoghurtbechern sogar jeder zehnte Deckel fehlerhaft ist.

   (a) Bestimmen Sie den Anteil der Becher mit defektem Deckel unter allen Bechern, die keinen Erdbeerjoghurt enthalten.

   Klären Sie, ob es durch Absenken des Ausschussanteils allein beim Erdbeerjoghurt gelingen kann, den angestrebten Qualitätsstandard von insgesamt höchstens 1 % Ausschussanteil einzuhalten.

   (b) Alle Becher mit defektem Deckel dieser Tagesproduktion werden aussortiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält ein Becher, der zufällig aus den verbleibenden Becher ausgewählt wird, Erdbeerjoghurt?

5. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln einen Pasch (11, 22, ..., 66) zu erhalten, beträgt bekanntlich $\frac{1}{6}$.

   (a) Es wird 4-mal hintereinander jeweils mit 2 Würfeln gewürfelt.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass insgesamt genau 3-mal Pasch fällt, wenn bekannt ist, dass mindestens einmal Pasch dabei war?
   Angenommen, Pasch fällt insgesamt genau 3-mal, mit welcher Wahrscheinlichkeit waren dann diese drei Pasch-Würfe hintereinander?

   (b) Berechnen Sie, wie oft man würfeln müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für „mindestens einmal Pasch“ mindestens 99 % beträgt.

# 10. Klasse Lösungen	10
Bedingte Wahrscheinlichkeit	**04**

1. S=Schwimmen, F=Fußball, L=Lauf, M=Mädchen, B=Buben, gesamt $26 + 28 = 54$

	S	F	L	
M	12	**2**	14	**28**
B	**2**	14	10	**26**
	14	16	24	**54**

Zuerst werden die fett gedruckten Felder ausgefüllt. Für F + L bleiben $54 - 14 = 40$, davon $\frac{2}{5}$ Fußball, also 16. Danach werden die restlichen Felder so ergänzt, dass die Spalten- und Zeilensummen stimmen, also z. B. erste Spalte $12 + 2 = 14$ usw.

W., dass Mädchen Fußball spielt: $P_M(F) = \frac{P(F\cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{2}{54}}{\frac{28}{54}} = \frac{2}{28} \approx 7{,}1$ %

W., dass Bub Fußball spielt: $P_B(F) = \frac{P(F\cap B)}{P(B)} = \frac{14}{26} \approx 53{,}8$ %. Da für Buben die W. der Fußball-Leidenschaft größer ist, hängt diese offenbar vom Geschlecht ab.

„stammt"-Frage umformuliert: W. für Mädchen unter der Bedingung Fußball:
$P_F(M) = \frac{P(M\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{54}}{\frac{16}{54}} = \frac{2}{16} = 12{,}5$ %.

2. (a) $P($„Brennt weniger als 200 d"$) = 1 - P($„Brennt $\geq$ 200 d"$) = 1 - 0{,}35 = 65$ %

(b) B_b: „Brennt mindestens b Tage.

$P_{B_0}(B_{100}) = \frac{P(B_{100}\cap B_0)}{P(B_0)} = \frac{61}{100} = 61$ %.

$P_{B_{100}}(B_{200}) = \frac{P(B_{200}\cap B_{100})}{P(B_{100})} = \frac{35}{61} \approx 57$ %.

$P_{B_{200}}(B_{300}) = \frac{P(B_{300}\cap B_{200})}{P(B_{200})} = \frac{18}{35} \approx 51$ %.

Deutung der Abnahme dieser bedingten W.: Ältere Leuchtstoffröhren haben aufgrund ihres Alters geringere „Überlebenschancen".

3.

	A	$\overline{A}$	
B	**0,18**	0,112	0,292
$\overline{B}$	**0,54**	0,168	0,708
	0,72	0,28	1

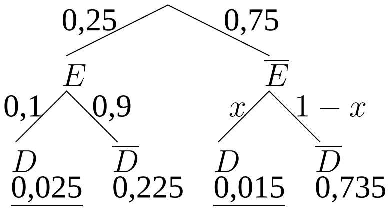
Vierfeldertafel: Die fett gedruckten Felder werden zuerst ausgefüllt; danach: $P(A \cup B)$ besteht aus den drei unterstrichenen Feldern.

$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}18}{0{,}292} \approx 61{,}6$ %

$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}112}{0{,}28} = 0{,}4 = 40$ %

4. E: „Becher enthält Erdbeerjoghurt", D: „Deckel defekt"

Baumdiagramm: Die unterstrichenen Daten müssen zusammen 4 % ergeben.

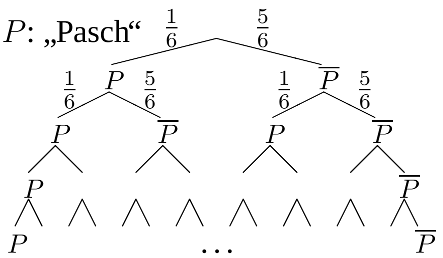


(a) $x = P_{\overline{E}}(D) = \frac{P(D\cap\overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{0{,}015}{0{,}75} = 0{,}02 = 2$ %

Bei Absenken des Ausschussanteils beim Erdbeerjoghurt auf 0 würde der gesamte Ausschussanteil immer noch $P(D \cap \overline{E}) = 0{,}015 = 1{,}5$ % betragen, so dass auf diese Weise das angestrebte Ziel nicht erreicht werden kann.

(b) $P_{\overline{D}}(E) = \frac{P(E\cap\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0{,}225}{0{,}96} \approx 0{,}2344 = 23{,}44$ %

5. (a) P: „Pasch"



A: „genau 3-mal Pasch",
B: „mindestens einmal Pasch",
C: „drei Pasch hintereinander"

$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{1-(\frac{5}{6})^4} \approx 0{,}298$

$P_A(C) = \frac{2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}} = 0{,}5$

(b) Für die Anzahl n der Würfe muss gelten:
$P($„mind. einmal P."$) = 1 - P($„kein P."$) = 1 - (\frac{5}{6})^n \geq 0{,}99$, also $(\frac{5}{6})^n \leq 0{,}01$.
Lösung dieser Exponentialgleichung durch Logarithmieren und Anwenden der log-Rechenregeln: $n \cdot \log\frac{5}{6} \leq \log 0{,}01 \quad | : \log\frac{5}{6} < 0$ (!)
$n \geq \frac{\log 0{,}01}{\log\frac{5}{6}} \approx 25{,}3$. Also muss die Anzahl der Würfe $n \geq 26$ sein.