



10. Klasse Übungsaufgaben	10
Polynomgleichungen, Polynom-Nullstellen	06

Weiteres Beispiel siehe ueb94.pdf, Aufgabe 6.

1. Lösen Sie folgende Gleichung höheren Grades: $x^3 + 10x = 4x^2 + 12$

2. Bestimmen Sie die Nullstellen und geben Sie die Faktorzerlegung an:

(a) $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5$

(b) $f(x) = x^5 + 5x^4 - 13x^3 + 7x^2$

3. Zeigen Sie, dass $x = 2,5$ ein Schnittpunkt der durch $f(x)$ und $g(x)$ gegebenen Funktionen ist, und bestimmen Sie die weiteren Schnittpunkte: $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3$, $g(x) = 13x - 4,5$

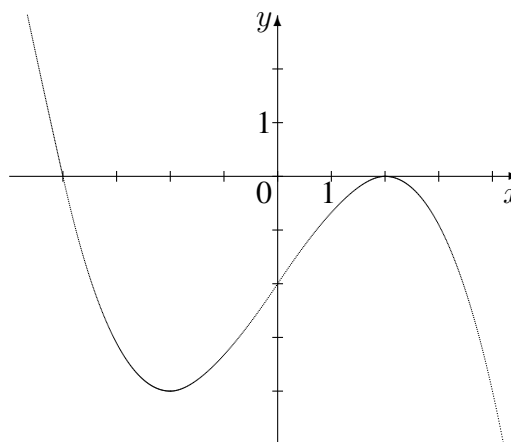
4. Lösen Sie folgende Gleichung:

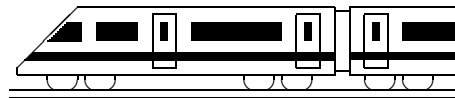
$$\frac{2x}{x-3} = x^2 - 7x + 6$$

5. Faktorisieren Sie den Nenner und bestimmen Sie den Definitionsbereich:

$$f(x) = \frac{1}{4x^3 + 7x^2 - 2x}$$

6. Bestimmen einen Funktionsterm zu der durch nebenstehenden Graphen gegebenen Funktion.





10. Klasse Lösungen	10
Polynomgleichungen, Polynom-Nullstellen	06

1.

$$x^3 - 4x^2 + 10x - 12 = 0.$$

Probiere $x = 1$: $1^3 - 4 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 12 \neq 0$ geht nicht, $x = -1$ geht nicht, $x_1 = 2$ geht: $2^3 - 4 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 12 = 0$. Also Polynomdivision durch $(x - 2)$:

(Den in grund105.pdf beschriebenen Vorzeichenwechsel möge der Leser in den jeweils unterstrichenen Zeilen mit Farbstift selbst durchführen)

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x^2 + 10x - 12) : (x - 2) = \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ -2x^2 + 10x \\ \underline{-2x^2 + 4x} \\ 6x - 12 \\ \underline{6x - 12} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 - 2x + 6 = 0; x_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \quad \nabla$$

Also $x_1 = 2$ einzige Lösung.

2.

- (a) Nullstelle „raten“: $x_1 = 1$. Polynomdivision $(x^3 - x^2 - 5x + 5) : (x - 1) = x^2 - 5$ (siehe ueb105.pdf, Aufgabe 3b). $x^2 - 5 = 0$; $x_{2/3} = \pm \sqrt{5}$.

$$\text{Also } f(x) = (x - 1)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}).$$

[Bei dieser Aufgabe könnte man übrigens die Faktorzerlegung und damit die Nullstellen auch durch Ausklammern und Anwenden der dritten binomischen Formel erkennen: $f(x) = x^2(x - 1) - 5(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 5)$].

- (b) $f(x) = x^2(x^3 + 5x^2 - 13x + 7)$.

Also $x_{1/2} = 0$ (doppelt).

Nullstelle „raten“: $x_3 = 1$.

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} (x^3 + 5x^2 - 13x + 7) : (x - 1) = \\ = x^2 + 6x - 7 \end{array}$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0;$$

$$x_{4/5} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 8}{2};$$

$$x_4 = 1 \text{ (doppelt); } x_5 = -7.$$

$$\text{Somit: } f(x) = x^2(x - 1)^2(x + 7).$$

3.

$f(2,5) = 4 \cdot 2,5^3 - 6 \cdot 2,5^2 + 3 = 28$, $g(2,5) = 13 \cdot 2,5 - 4,5 = 28$. Also ist $(2,5|28)$ ein gemeinsamer Punkt der Graphen.

(Fortsetzung von 3.)

Schnittpunkte: $f(x) = g(x)$;

$$4x^3 - 6x^2 + 3 = 13x - 4,5;$$

$$4x^3 - 6x^2 - 13x + 7,5 = 0.$$

Da die Lösung $x_1 = 2,5$ schon bekannt ist, Polynomdivision durch $(x - 2,5)$:

$$\begin{array}{r} (4x^3 - 6x^2 - 13x + 7,5) : (x - 2,5) = \\ = 4x^2 + 4x - 3 \end{array}$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0; x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4};$$

$$x_2 = 0,5; x_3 = -1,5.$$

Durch Einsetzen dieser x -Werte in f oder g erhält man die y -Werte der weiteren Schnittpunkte: $(0,5|2)$ und $(-1,5|-24)$.

4.

Multiplikation mit dem Nenner $x - 3$ ergibt:

$$2x = (x^2 - 7x + 6)(x - 3), \text{ also}$$

$$2x = x^3 - 3x^2 - 7x^2 + 21x + 6x - 18, \text{ also}$$

$$x^3 - 10x^2 + 25x - 18 = 0.$$

Lösung „raten“: $x_1 = 2$. Polynomdivision

$$(x^3 - 10x^2 + 25x - 18) : (x - 2) = x^2 - 8x + 9.$$

$$x^2 - 8x + 9 = 0;$$

$$x_{2/3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 4 \pm \sqrt{7}.$$

Alle drei Lösungen dürfen in die Gleichung eingesetzt werden (kritisch wäre nur im Nenner der x -Wert 3 gewesen). Also Lösungsmenge:

$$L = \{2; 4 + \sqrt{7}; 4 - \sqrt{7}\}.$$

5.

Definitionslücken:

$$4x^3 + 7x^2 - 2x = 4x(x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}) = 0;$$

$$x_1 = 0; x_{2/3} = \frac{-1,75 \pm \sqrt{1,75^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-0,5)}}{2 \cdot 1};$$

$$x_2 = -2; x_3 = 0,25.$$

Definitionsbereich D also $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 0,25\}$.

Nenner faktorisieren: $f(x) = \frac{1}{4x(x+2)(x-0,25)}$.

6.

Der Zeichnung entnimmt man die Nullstellen -4 (einfach) und 2 (doppelt); Ansatz also $y = a(x + 4)(x - 2)^2$.

Der Zeichnung entnimmt man ferner $(0|-2)$ als Punkt des Graphen. Einsetzen dieser x - und y -Werte liefert:

$$-2 = a \cdot (0 + 4)(0 - 2)^2 = 16a, \text{ also } a = -\frac{1}{8}.$$

$$\text{Somit } f(x) = -\frac{1}{8}(x + 4)(x - 2)^2.$$