

10. Klasse Übungsaufgaben	10
Vorzeichenbereiche	07

1. Ermitteln Sie die Vorzeichenbereiche für den folgenden Funktionsterm:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

2. Ermitteln Sie die Vorzeichenbereiche für die durch

$$f(x) = -(x - 2)^3 \cdot x^2$$

gegebene Funktion und fertigen Sie eine prinzipielle Skizze des Funktionsgraphen.

3. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $-3x^2 - 4x + 5 \geq 0$

(b) $x^2 + 10 < 3x$

4. Ermitteln Sie den Definitionsbereich für $f(x) = \sqrt{5x^2 - 40x - 100}$.

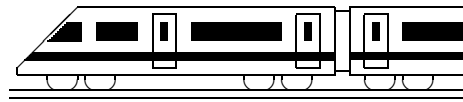
5. Faktorisieren Sie Zähler und Nenner, kürzen Sie anschließend und ermitteln Sie die Vorzeichenbereiche:

$$f(x) = \frac{10x^2 - 70}{\sqrt{7}x^2 + 5x - 2\sqrt{7}}$$

(Für die beim Lösen der quadratischen Gleichung des Nenners auftretenden Wurzeln siehe ueb91.pdf, Aufgabe 4 (b)).

6. Ermitteln Sie, in welchen Bereichen der Funktionsgraph ober- bzw. unterhalb der x -Achse verläuft:

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2}{(x^2 + x + 1)^2}$$



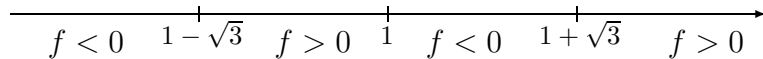
10. Klasse Lösungen	10
Vorzeichenbereiche	07

1. $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$. Gezieltes Raten: $x_1 = 1$.

Polynomdivision: $(x^3 - 3x^2 + 2) : (x - 1) = x^2 - 2x - 2$.

$$x^2 - 2x - 2 = 0; x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

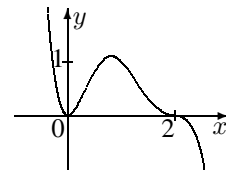
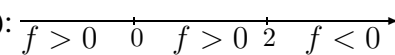
Lauter einfache Nullstellen mit Vorzeichenwechsel. Ferner sieht man für große x -Werte $f(x) > 0$. Somit:



2. $f(x) = 0; x_{1/2/3} = 2$ (3-fache Nullstelle, Vorzeichenwechsel);

$x_{4/5} = 0$ (doppelte Nullstelle, kein Vorzeichenwechsel).

Somit (da z. B. $f(3) = -9$):

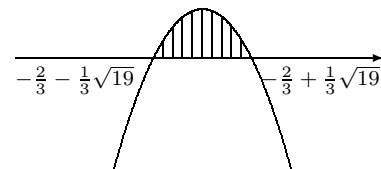


3. (a) Löse die zugehörige quadratische Gleichung: $-3x^2 - 4x + 5 = 0$:

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot (-3)} = \frac{4 \pm \sqrt{76}}{-6} = -\frac{2}{3} \mp \frac{1}{3} \sqrt{19}.$$

Nach unten geöffnete Parabel mit Bereich „ ≥ 0 “ (Bild rechts).

$$\text{Also ist } L = \left[-\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{19}; -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{19}\right].$$



(b) Zuerst alles auf eine Seite bringen: $x^2 - 3x + 10 \leq 0$.

Zugehörige quadratische Gleichung: $x^2 - 3x + 10 = 0$.

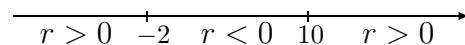
$x_{1/2} = 1,5 \pm \sqrt{2,25 - 10} \notin \mathbb{R}$, also keine Lösungen, also „schwebende“ nach oben geöffnete Parabel (siehe Bild), bei der die Werte unterhalb (wegen „ \leq “) der x -Achse gesucht sind. Da es solche Werte nicht gibt, ist $L = \{\}$.



4. Es muss gelten: Radikand $r(x) = 5x^2 - 40x - 100 \geq 0$.

$$\text{Nullstellen von } r: x_{1/2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 4 \cdot 5 \cdot (-100)}}{2 \cdot 5} = \frac{40 \pm 60}{10}; x_1 = 10; x_2 = -2.$$

Da r eine nach oben geöffnete Parabel ist:



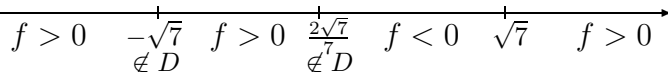
Somit: $D_f =] - \infty; -2] \cup [10; +\infty[$.

5. Betrachte Zähler: $10x^2 - 70 = 0; x_{1/2} = \pm \sqrt{7}$.

Betrachte Nenner: $\sqrt{7}x^2 + 5x - 2\sqrt{7} = 0. x_1 = -\sqrt{7}; x_2 = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ (siehe ueb91.pdf).

$$\text{Somit: } f(x) = \frac{10x^2 - 70}{\sqrt{7}x^2 + 5x - 2\sqrt{7}} = \frac{10(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})}{\sqrt{7}(x + \sqrt{7})(x - \frac{2\sqrt{7}}{7})} = \frac{10(x - \sqrt{7})}{\sqrt{7}(x - \frac{2\sqrt{7}}{7})}.$$

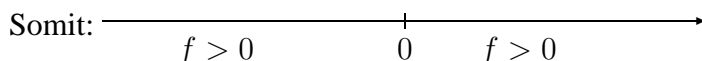
Durch Einsetzen geeigneter Funktionswerte oder durch Betrachtung der Vorzeichen der Linearfaktoren erhält man:



6. Da die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ keine Lösung hat, ist der Nenner stets > 0 .

Zähler: $x^4 + 2x^3 + 3x^2 = x^2(x^2 + 2x + 3)$.

$x_{1/2} = 0$ oder $x^2 + 2x + 3 = 0$, wobei letztere Gleichung wiederum keine Lösung hat. Stellt man sich den Graphen zum Term $x^2 + 2x + 3$ vor, so handelt es sich also um eine „schwebende“ Parabel ohne Nullstellen, d. h. $x^2 + 2x + 3$ ist stets > 0 .



Der Graph von f verläuft somit in ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ oberhalb der x -Achse.