10. Klasse Übungsaufgaben — 10
Eigenschaften von Funktionsgraphen — 09

1. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:
   (a) $f(x) = x^5 - 4x^4$ (b) $f(x) = -x^6 + 3x$
   (c) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{-2x+1}$ (d) $f(x) = \frac{-2x+1}{x^2-2x+1}$
   (e) $f(x) = -3 \cdot 0{,}1^x$ (Tipp für $x \to -\infty$: Siehe Teilaufgabe (h))
   (f) $f(x) = 10^x + 0{,}3$ (g) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} - 5$
   (h) In den meisten der vorhin beschriebenen Aufgaben kann auch mit Hilfe des Taschenrechners durch Einsetzen einer sehr großen Zahl (z. B. 1 000 000) eine Vorstellung vom Grenzwert für $x \to \infty$ gewonnen werden. Betrachten Sie nun jedoch folgendes Beispiel, bei dem Vorsicht geboten ist:
   $f(x) = x^2 - 10^{-10} \cdot x^3$

2. Untersuchen Sie auf Achsensymmetrie (A) zur y-Achse bzw. Punktsymmetrie (P) zum Nullpunkt (Ursprung) des Koordinatensystems:
   (a) $f(x) = x^{11} - x^5 + 2x$
   (b) $f(x) = x^6 - 9x^4$ (c) $f(x) = \frac{x^4+1}{x(x^3-3x)}$ (d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2-3x)}$
   (e) Untersuchen Sie Teilaufgabe (b) bis (d) zusätzlich auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

   Für die sin- und cos-Funktion gelten: $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$.
   Welche Symmetrieeigenschaft haben demnach
   (f) die sin- und cos-Funktion,
   (g) die durch $f(x) = (\sin x \cdot \cos x)^3$ gegebene Funktion?

3. Berechnen Sie für $f(x) = \frac{2x+4}{x-3},\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$, Nullstelle und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

   Begründen Sie durch Einsetzen von x-Werten wie 2,99 oder 3,01, welches Verhalten der Funktionsgraph in der Nähe der Definitionslücke zeigt.

   Fertigen Sie eine Skizze des Funktionsgraphen.

   Entnehmen Sie der Skizze, zu welchem Punkt $Z(a|b)$ der Graph punktsymmetrisch ist.

   Verschieben Sie die Funktion um a nach links und um b nach unten und beweisen Sie für die verschobene Funktion die Punktsymmetrie zum Ursprung.

4. Gegeben sind die durch $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2)$ und $h(x) = \frac{1}{x^2}$ definierten Funktionen.
   (a) Berechnen Sie für f die Nullstellen.
   (b) Welche Bedeutung für den Graphen von f hat die Tatsache, dass sich die Gleichung $\frac{1}{8}(x^3-6x^2) = -4$ umformen lässt in $x^3-6x^2+32 = (x+2)(x-4)^2 = 0$?
   (c) Skizzieren Sie die Graphen von f und h in ein gemeinsames Koordinatensystem.
   Beschreiben Sie Steigen und Fallen der Graphen.
   Beantworten Sie nun die Frage, wie viele Lösungen die Gleichung $\frac{1}{8}(x^3-6x^2) = \frac{1}{x^2}$ hat.

10. Klasse Lösungen	10
Eigenschaften von Funktionsgraphen	**09**

1. (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to \pm\infty$. (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to -\infty$.

   (c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x-2+\frac{1}{x}}{-2+\frac{1}{x}} \to \mp\infty$. (d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0$.

   (e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$ (denn z. B. $-3\cdot 0{,}1^{-100} = -3\cdot(\frac{1}{10})^{-100} = -3\cdot 10^{100}$), $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0{,}3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to +\infty$. (g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to -5$.

   (h) Hier ist zwar $f(1\,000\,000) = (10^6)^2 - 10^{-10}\cdot(10^6)^3 = 10^{12} - 10^{-10+18} = +999\,900\,000\,000$, jedoch ist wegen „$-x^3$“ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to -\infty$.

2. (a) P: $f(-x) = (-x)^{11} - (-x)^5 + 2(-x) = -x^{11} + x^5 - 2x = -(x^{11} - x^5 + 2x) = -f(x)$.

   (b) A: $f(-x) = (-x)^6 - 9(-x)^4 = x^6 - 9x^4 = f(x)$.

   (c) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^4-3x^2}$, also A: $f(-x) = \frac{(-x)^4+1}{(-x)^4-3(-x)^2} = \frac{x^4+1}{x^4-3x^2} = f(x)$.

   (d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x^2} = \frac{x^2-1}{x^2(x-3)}$ hat Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0;3\}$; der Funktionsgraph kann also nicht symmetrisch sein, da schon D_f nicht symmetrisch ist. Sichtbar ist die Nicht-Symmetrie auch an einem Gegenbeispiel, z. B. $f(-2) = \frac{4-1}{-8-3\cdot 4} = -\frac{3}{20}$, aber $f(2) = \frac{4-1}{8-3\cdot 4} = -\frac{3}{4}$.

   (e)

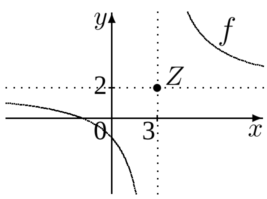
	y-Achsen-Schnitt	Nullstellen $f(x) = 0$
(b)	$y = f(0) = 0$	$x_{1/2/3/4} = 0$, $x_5 = 3$, $x_6 = -3$
(c)	kein (da $f(0)$ Nenner ↯)	keine (da $x^4 + 1 = 0$ ↯)
(d)	kein (da $f(0)$ Nenner ↯)	$x_{1/2} = \pm 1$

   (f) sin ist punktsymmetrisch zum Ursprung, cos achsensymmetrisch zur y-Achse.

   (g) P: $f(-x) = (\sin(-x)\cdot\cos(-x))^3 = (-\sin x\cdot\cos x)^3 = -(\sin x\cdot\cos x)^3 = -f(x)$.

3. Nullstelle: $f(x) = 0$ liefert $2x + 4 = 0$, also $x = -2$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{4}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2$.

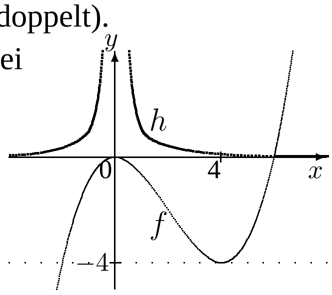
   $f(3{,}01)$: Im Zähler etwas mehr als 10, im Nenner $0,01$, also sehr großer Funktionswert. $f(2{,}99)$: Im Zähler fast 10, im Nenner $-0{,}01$, also negativer betragsmäßig sehr großer Funktionswert (Graph nach unten $\to -\infty$).

   Gemäß Skizze ist Punktsymmetrie-Zentrum $Z(3|2)$ zu vermuten.
   Verschobene Funktion:
   $h(x) = f(x+3) - 2 = \frac{2(x+3)+4}{x+3-3} - 2 = \frac{2x+10}{x} - \frac{2x}{x} = \frac{2x+10-2x}{x} = \frac{10}{x}$.
   Punktsymmetrie: $h(-x) = \frac{10}{-x} = -\frac{10}{x} = -h(x)$.

4. (a) $f(x) = 0$; $\frac{1}{8}x^2(x-6) = 0$; $x_{1/2} = 0$; $x_3 = 6$.

   (b) Lösungen der Gleichung sind $x_4 = -2$ und $x_{5/6} = 4$ (doppelt).
   An diesen Stellen ist der y-Wert von f gleich -4, wobei bei $x_{5/6} = -4$ die Horizontale $y = -4$ berührt wird.

   (c) f steigt in $]-\infty;0[$, fällt in $]0;4[$ und steigt in $]4;\infty[$.
   h steigt in $]-\infty;0[$ und fällt in $]0;\infty[$.
   Die Gleichung $f(x) = h(x)$ hat genau eine Lösung, da es genau einen Schnittpunkt gibt.