



11. Klasse Übungsaufgaben	11
Steckbriefaufgabe, Optimierung	10

1. Berechnen Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte $P(2012|2013)$ und $Q(2015|2014)$

2. Berechnen Sie den Term einer Polynomfunktion 3. Grades mit waagrechter Tangente im Punkt $(1 | -64)$ und Nullstelle $x = 5$, die durch den Punkt $(0 | -65)$ geht.

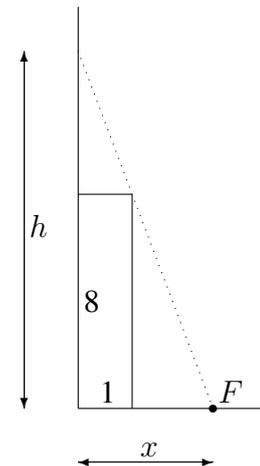
[Zur Kontrolle: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 65$]

Zeigen Sie, dass es keine weitere Nullstellen gibt.

3. Bestimmen Sie mit dem Ansatz $f(x) = (x + a)e^{bx}$ den Term einer Funktion, die die y -Achse bei $y = 1$ mit Steigung 3 schneidet.

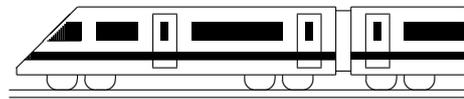
4. An eine hohe Hauswand, vor der wie in nebenstehender (nicht maßgetreuer) Skizze ein 1 m breiter und 8 m hoher Anbau steht, soll wie in der Skizze eine möglichst kurze Leiter gelehnt werden.

In welcher Entfernung x vom Hochhaus ist der untere Punkt F der Leiter zu wählen?



5. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird gelegentlich das Produkt der Wahrscheinlichkeit p ($\in [0; 1]$) mit der Gegenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ benötigt.

Wann ist dieses Produkt besonders groß/klein?



11. Klasse Lösungen	11
Steckbriefaufgabe, Optimierung	10

1. Steigungsdreieck $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2013 - 2014}{2012 - 2015} = \frac{1}{3}$. Ansatz also: $y = \frac{1}{3}x + t$
 P einsetzen: $2013 = \frac{1}{3} \cdot 2012 + t \Rightarrow t = 1342\frac{1}{3}$. Also Geradengl.: $y = \frac{1}{3}x + 1342\frac{1}{3}$.

2. Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, also $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Punkt $(1 | -64)$, also $f(1) = -64$: $a + b + c + d = -64$.

Waagrechte Tangente bei $x = 1$, also $f'(1) = 0$: $3a + 2b + c = 0$.

Nullstelle $x = 5$, also $f(5) = 0$: $125a + 25b + 5c + d = 0$.

Punkt $(0 | -65)$, also $f(0) = -65$: $d = -65$.

Gleichungssystem nach Einsetzen Also $a = 1$, also (aus $2a + b = -1$) $b = -3$,
 von $d = -65$: also (aus $a + b + c = 1$) $c = 3$.

$a + b + c = 1 \quad | \cdot (-1) \quad | \cdot (-5)$ Somit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 65$.

$3a + 2b + c = 0 \quad | \cdot 1$ Nullstellen: $f(x) = 0$, $x_1 = 5$, Polynomdivisi-
 $125a + 25b + 5c = 65 \quad | \cdot 1$ on $(x^3 - 3x^2 + 3x - 65) : (x - 5) = x^2 + 2x + 13$.

$2a + b = -1 \quad | \cdot (-20)$ $x^2 + 2x + 13 = 0$ liefert wegen $x_{2/3} =$
 $120a + 20b = 60 \quad | \cdot 1$ $\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1}$ keine weiteren Nullstellen.

$80a = 80$.

3. $f(x) = (x+a)e^{bx}$, also (Produktregel) $f'(x) = 1 \cdot e^{bx} + (x+a)e^{bx} \cdot b = (1+bx+ab)e^{bx}$.

Punkt $(0, 1)$, also $f(0) = 1$: $ae^0 = 1$, also $a = 1$.

Steigung bei $x = 0$ ist 3, also $f'(0) = 3$: $1 + ab = 3$.

Einsetzen von $a = 1$ liefert $b = 2$. Also $f(x) = (x + 1)e^{2x}$.

4. G: Zu minimieren: Leiterlänge $\overline{AF} = \sqrt{h^2 + x^2}$

N: Dreieck ABF ähnlich zu Dreieck CDF , also $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DF}}$, d. h.

$$\frac{h}{x} = \frac{8}{x-1}$$

A: Aus N folgt $h = \frac{8x}{x-1}$, also $\overline{AF} = \sqrt{\left(\frac{8x}{x-1}\right)^2 + x^2}$.

Dieser Ausdruck wird minimal, wenn der Ausdruck unter der Wurzel

$$r(x) = \left(\frac{8x}{x-1}\right)^2 + x^2 = \frac{64x^2}{(x-1)^2} + x^2 = \frac{64x^2 + x^2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^4 - 2x^3 + 65x^2}{(x-1)^2}$$

möglichst klein ist.

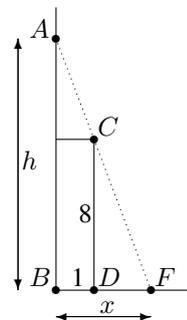
$$D: r'(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot (4x^3 - 6x^2 + 130x) - (x^4 - 2x^3 + 65x^2) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x^3 - 3x^2 + 3x - 65)}{(x-1)^3}$$

$((x-1)$ kürzen, Zähler zusammenfassen, $2x$ ausklammern)

E: $r'(x) = 0$ liefert $2x(x^3 - 3x^2 + 3x - 65) = 0$, also $x_1 = 0$ oder $x^3 - 3x^2 + 3x - 65 = 0$.

Die Nullstelle von letzterem Polynom kann mit $x_2 = 5$ „geraten“
 werden; weitere Nullstellen sind nicht vorhanden (\rightarrow Aufgabe 3). $r' > 0$ steigt $r' < 0$ fällt $r' > 0$ steigt

Also ist r und damit die Leiterlänge \overline{AF} minimal für $x = 5$.



5. Zu optimierende Größe: $pq = p(1-p)$ (Damit ist bereits im ersten Schritt auch die Nebenbedingung $q = 1 - p$ und das Ausdrücken durch nur eine Variable geschehen).

Umbenennung $x \leftrightarrow p$: $f(x) = x(1-x) = x - x^2$, $x \in [0; 1]$.

Differenzieren: $f'(x) = 1 - 2x$. Extremwerte suchen: $f'(x) = 0$; $x = \frac{1}{2}$.

Da es sich bei f um eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen 0 und 1 handelt, ist bei $x = \frac{1}{2}$, also bei $p = \frac{1}{2}$ das obige Produkt maximal (nämlich $p(1-p) = \frac{1}{4}$).

Wegen des Wertebereichs $[0; 1]$ gibt es daneben noch Randminima bei $p = 0$ und $p = 1$ mit minimalem Wert $p(1-p) = 0$.