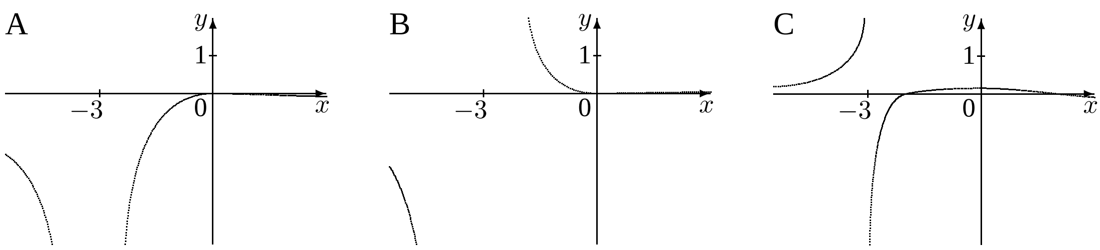
11. Klasse Übungsaufgaben	**11**
Gebrochen-rationale Funktionen, lim $x \to x_0$	**01**

Weitere Beispiele und Aufgaben → grund87.pdf, grund109.pdf, grund100.pdf, ueb87.pdf, ueb105.pdf Aufgabe 6, ueb107.pdf Aufgaben 5/6, ueb109.pdf Aufgabe 3 und ueb100.pdf.

1. Gegeben ist $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+5x}$.
   Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to -5\pm 0} f(x)$.
   Fertigen Sie eine grobe Skizze des Funktionsgraphen.

2. Formulieren Sie, was die Vielfachheit einer Polstelle über Vorzeichenwechsel an dieser Stelle bedeutet. Untersuchen Sie die folgenden Beispiele:
   (a) $f_1(x) = \dfrac{-x^2}{3x^2+18x+27}$ (b) $f_2(x) = \dfrac{x^2}{(x+3)^3}$ (c) $f_3(x) = \dfrac{4-x^2}{x^3+27}$
   Ordnen Sie die folgenden Graphen diesen drei Funktionstermen zu:
   

3. Rechnen Sie durch Faktorisieren direkt sowie mit Hilfe der h-Methode nach, dass (siehe grund111.pdf) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \dfrac{x^3-x^2}{2x^2-2} = \dfrac{1}{4}$.

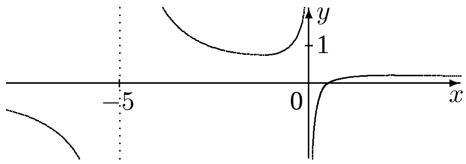
4. Berechnen Sie für $f(x) = \dfrac{2x^2-2}{x^2-3x+2}$ die Definitionslücken, geben Sie die faktorisierte Form und die Vorzeichenbereiche an und untersuchen Sie das Verhalten an der Definitionslücke $x = 1$ mit der h-Methode.

5. Geben Sie alle Asymptoten an:
   (a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+8x}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+8x}$
   (c) $f(x) = \dfrac{x^3+8x}{x^2-4} = x + \dfrac{12x}{x^2-4}$
   (Überzeugen Sie sich davon, dass die hier angegebene Umformung richtig ist!)
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{2} + 3x$ (e) $f(x) = \dfrac{7x^2-6x-3}{2x}$

6. Gegeben ist die Funktionenschar mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ durch $f_a(x) = \dfrac{-2x^2+50}{x^2+a}$.
   (a) Untersuchen Sie f_a auf Definitionsbereich und Nullstellen.
   Geben Sie den Schnittpunkt Y_a mit der y-Achse an.
   (b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\sqrt{-a}\pm 0} f(x)$, sofern $a < 0$.
   (c) Fertigen Sie eine Skizze der Funktionsgraphen für $a = -25$, $a = -16$ und $a = 25$.

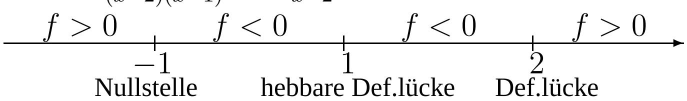
11. Klasse Lösungen — 11
Gebrochen-rationale Funktionen, lim $x \to x_0$ — 01

1. Faktorisieren: $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+5x} = \frac{2(x-0{,}5)}{x(x+5)}$.
   $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(x) = „\frac{-1}{(\pm 0)\cdot 5}" \to \mp\infty$.
   $\lim\limits_{x\to -5\pm 0} f(x) = „\frac{-11}{(-5)\cdot(\pm 0)}" \to \pm\infty$.



2. Bei einer Polstelle ungerader Vielfachheit erhält man einen Vorzeichenwechsel (Vzw); bei gerader Vielfachheit liegt bei Annäherung von links und von rechts das gleiche Vorzeichen vor. Definitionslücke ist in allen gegebenen Beispielen $x = -3$.
   (a) $f(x) = \frac{-x^2}{3(x+3)^2}$. Polstelle 2. Ordnung, kein Vzw. $\lim\limits_{x\to -3\pm 0} f(x) = „\frac{-9}{+0}" \to -\infty$
   (b) $f(x) = \frac{x^2}{(x+3)^3}$. Polstelle 3. Ordnung, Vzw. $\lim\limits_{x\to -3\pm 0} f(x) = „\frac{+9}{\pm 0}" \to \pm\infty$
   (c) $f(x) = \frac{(2+x)(2-x)}{(x+3)(x^2-3x+9)}$. Polstelle 1. Ordnung, Vzw. $\lim\limits_{x\to -3\pm 0} f(x) = „\frac{-5}{\pm 0}" \to \mp\infty$
   Damit ergibt sich: Abbildung A ist f_1, B ist f_2, C ist f_3.
3. Direkt mit Faktorisieren: $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x^2}{2(x+1)}$. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x) = „\frac{(1\pm 0)^2}{2\cdot(1\pm 0+1)}" = \frac{1}{4}$.

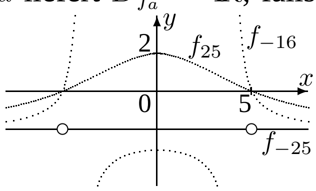
   h-Methode ohne Faktorisieren: $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(1\pm h) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(1\pm h)^3-(1\pm h)^2}{2(1\pm h)^2-2} =$
   $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{1\pm 3h+3h^2\pm h^3-1\mp 2h-h^2}{2(1\pm 2h+h^2)-2} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(\pm 1+2h\pm h^2)}{h(\pm 4+2h)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\pm 1+2h\pm h^2}{\pm 4+2h} = \frac{\pm 1}{\pm 4} = \frac{1}{4}$.
4. Definitionslücken: $x^2-3x+2=0$ ergibt $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.
   Faktorisierte Form: $f(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{2(x+1)}{x-2}$.
   Vorzeichenbereiche:



   $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2(1\pm h)^2-2}{(1\pm h)^2-3(1\pm h)+2} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\pm 4h+2h^2}{\mp h+h^2} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(\pm 4+2h)}{h(\mp 1+h)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\pm 4+2h}{\mp 1+h} = -4$
5.

	$f(x)$	Senkrechte Asymptote (Pol)	Asymptote für $x \to \pm\infty$
(a)	$\frac{(x+2)(x-2)}{x(x^2+8)}$	$x = 0$	Waagrecht: $y = 0$
(b)	$\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+8)}$	$x = 0$ und $x = -8$	Waagrecht: $y = 1$
(c)	$x + \frac{12x}{(x+2)(x-2)}$	$x = -2$ und $x = 2$	Schräg: $y = x$
(d)	$3x - \sqrt{2} + \frac{1}{x-1}$	$x = 1$	Schräg: $y = 3x - \sqrt{2}$
(e)	$\frac{7}{2}x - 3 - \frac{3}{2x}$	$x = 0$	Schräg: $y = \frac{7}{2}x - 3$

   Zu (c): $f(x) = x + \frac{12x}{x^2-4} = \frac{x(x^2-4)}{x^2-4} + \frac{12x}{x^2-4} = \frac{x^3-4x+12x}{x^2-4} = \frac{x^3+8x}{x^2-4} = \frac{x(x^2+8)}{(x+2)(x-2)}$
6. (a) Definitionsbereich: Nenner $x^2 + a = 0$, also $x^2 = -a$ liefert $D_{f_a} = \mathbb{R}$, falls $a > 0$, und $D_{f_a} = \mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{-a}\}$, falls $a \le 0$.
   Nullstellen: Zähler $-2x^2+50 = 0$ liefert $x_{1/2} = \pm 5$.
   Einsetzen von $x = 0$ ergibt $Y_a(0|\frac{50}{a})$ $(a \neq 0)$.



   (b) Faktorisieren für $a < 0$: $f_a(x) = \frac{-2(x+5)(x-5)}{(x+\sqrt{-a})(x-\sqrt{-a})}$.

   $\lim\limits_{x\to\sqrt{-a}\pm 0} f_a(x) = „\frac{-2(\sqrt{-a}\pm 0+5)(\sqrt{-a}\pm 0-5)}{(\sqrt{-a}\pm 0+\sqrt{-a})(\sqrt{-a}\pm 0-\sqrt{-a})}" = „\frac{-2(\sqrt{-a}+5)(\sqrt{-a}-5)}{(2\sqrt{-a})(\pm 0)}" \to \pm\infty$,
   denn für $-25 < a < 0$ ist $\sqrt{-a} - 5$ negativ, der Zähler insgesamt also positiv.
   (c) Man beachte, dass $f_{-25}(x) = \frac{-2(x^2-25)}{x^2-25} = -2$ mit $D_{f_{-25}} = \mathbb{R}\setminus\{\pm 5\}$.