11. Klasse Übungsaufgaben — 11
Differenzieren — 02

1. Gegeben sind die folgenden Funktionsterme:

   - $f_1(x) = x^4 - 16$
   - $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$
   - $f_3(x) = 11$
   - $f_4(x) = (x-1)(x^2+x+7)$ (Vorsicht: Produkte erfordern vor dem Differenzieren ein Ausmultiplizieren [oder die Anwendung der Produktregel → grund115.pdf])

   (a) Berechnen Sie die Ableitungen.

   (b) Berechnen Sie die Steigung der Tangenten in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

2. Untersuchen Sie in den folgenden Fällen die Bedeutung der Ableitung f':

   (a) $f(x) =$ Geschwindigkeit zur Zeit x.

   (b) $f(x) =$ Volumen eines Würfels, dessen Seitenflächen vom Würfel-Mittelpunkt den Abstand x haben (somit Würfel-Kantenlänge $2x$).

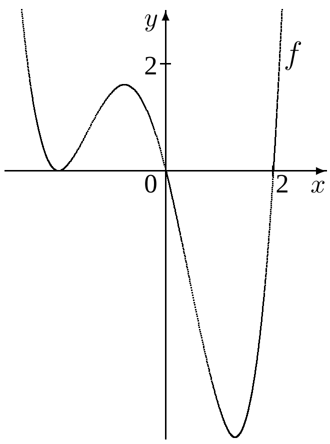
3. Untersuchen Sie auf Differenzierbarkeit: $f(x) = |\frac{1}{2}x + 1|$

4. Ergänzen Sie die folgende Tabelle mit Stammfunktionen:

$f(x)$	1	x	x^2	x^3	x^n
$F(x)$		$\frac{1}{2}x^2 + c$			

   Geben Sie dann die Stammfunktions-Terme zu $f(x) = 7x^2 - 8x - 1$ an.

5. Gegeben ist der nebenstehende Graph einer Funktion f. Ermitteln Sie graphisch die Form des Graphen zur Ableitungsfunktion f'.
   Skizzieren Sie ferner umgekehrt die Gestalt des Graphen einer Stammfunktion F.



11. Klasse Lösungen	11
Differenzieren	**02**

1. Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen) ergeben sich aus $f(x) = 0$ und sind im Folgenden mit N_i bezeichnet. Der Schnittpunkt Y mit der y-Achse ergibt sich durch Berechnung von $f(0)$.
   (a)
   - $f_1'(x) = 4x^3$
   - $f_3'(x) = 0$
   - $f_2'(x) = -x - 2$
   - $f_4(x) = x^3 + 6x - 7$, also $f_4'(x) = 3x^2 + 6$

   (b)
   - $N_1(-2|0)$, $N_2(2|0)$; Steigungen: $f_1'(-2) = -32$, $f_1'(2) = 32$.
     $Y(0|-16)$; Steigung $f_1'(0) = 0$ (waagrechte Tangente).
   - $N_1(2|0)$, $N_2(-6|0)$; Steigungen: $f_2'(2) = -4$, $f_2'(-6) = 4$.
     $Y(0|6)$; Steigung: $f_2'(0) = -2$.
   - f_3 ist eine Parallele zur x-Achse und hat keine Nullstellen.
     $Y(0|11)$; Steigung: $f_3'(0) = 0$.
   - $N_1(1|0)$; Steigung: $f_4'(1) = 9$. $Y(0|-7)$; Steigung: $f_4'(0) = 6$.

2. (a) $f'(x) =$ Geschwindigkeitsänderung pro Zeit $=$ Beschleunigung zur Zeit x.
   (b) $f(x) = (2x)^3 = 8x^3$. $f'(x) = 24x^2 = 6 \cdot (2x)^2 =$ Oberfläche der Würfels.
   Anschaulich ist $f(x+h)$ das Volumen eines Würfels, der außen zusätzlich mit einer Haut der Dicke h überzogen ist. $f(x+h) - f(x)$ ist das Volumen der Haut. Dividert man dieses Volumen durch die Dicke h, so erhält man die Fläche.

3. $f(x) = |\frac{1}{2}x+1| = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{, falls } \frac{1}{2}x + 1 \geq 0 \\ -(\frac{1}{2}x + 1) & \text{, falls } \frac{1}{2}x + 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{, falls } x \geq -2 \\ -\frac{1}{2}x - 1 & \text{, falls } x < -2 \end{cases}$
   Die Funktion ist an der Stelle $x = -2$ nicht differenzierbar, denn die Grenzwerte $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \frac{\frac{1}{2}(-2+h)+1-0)}{h} = \frac{1}{2}$ und $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-2-h)-f(-2)}{-h} = \frac{-\frac{1}{2}(-2-h)-1-0}{-h} = -\frac{1}{2}$ stimmen nicht überein.
   Anschaulich ist $f(x) = |\frac{1}{2}(x+2)|$ eine um 2 nach links und mit Faktor 2 in x-Richtung gestreckte Betragsfunktion, so dass f an der Stelle -2 einen Knick aufweist.

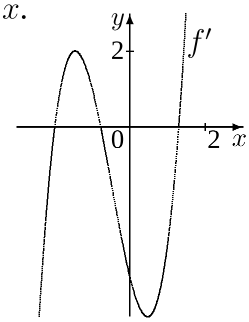
4.

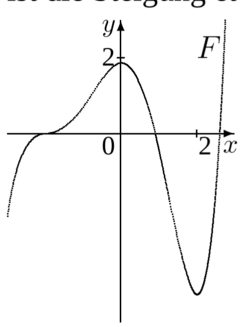
$f(x)$	1	x	x^2	x^3	x^n
$F(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

(jeweils plus additive Konstante $+c$)

Stammfunktionen zu $f(x) = 7x^2 - 8x - 1$: $F(x) = 7 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} - x + c$, also z. B. $F(x) = \frac{7}{3}x^3 - 4x^2 - x$.

5. Zur Ermittlung der Ableitung legt man an verschiedenen Punkten des Graphen eine Tangente und bestimmt mit Hilfe eines Steigungsdreiecks dessen Steigung. Die so gewonnenen Werte werden in ein Koordinatensystem eingetragen. So ist z. B. bei $x = -2$ die Steigung 0 ($\to$ Punkt $(-2|0)$), ebenso bei $x \approx -0{,}8$; bei $x = 0$ ist die Steigung etwa -4 ($\to$ Punkt $(0|-4)$).





Eine Stammfunktion von f, also eine Funktion F mit $F' = f$, muss für $x \in]-\infty; -2[$ (da der Graph von f dort oberhalb der x-Achse verläuft) die Eigenschaft $F'(x) > 0$ haben, also zunächst steigend verlaufen. Bei $x = -2$ ist $F'(-2) = f(-2) = 0$, also die Steigung dort 0; entsprechend erhält man den weiteren Verlauf von F. Neben der hier gezeichneten Stammfunktion sind ebenso nach oben oder unten verschobene Graphen als Lösung möglich.