11. Klasse Übungsaufgaben	**11**
Koordinatengeometrie: Vektoren	**04**

1. Gegeben ist die Pyramide $ABCS$ durch die Punkte $A(5|0|0)$, $B(3|4|1)$, $C(1{,}5|-2|2{,}5)$ und $S(3|2|5)$, die von den Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AS}$ aufgespannt wird. M sei der Mittelpunkt von $[AB]$, der Punkt T teile die Strecke $[CB]$ im Verhältnis $2:1$, d. h. es ist $\overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

   (a) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte M und T.

   (b) Stellen Sie die Situation in einem Koordinatensystem zeichnerisch dar.

   (c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCS$ und der Pyramide $MBTS$.

   (d) Drücken Sie den Vektor $\overrightarrow{TS}$ durch $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ aus (d. h. in Form einer sog. Linearkombination $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w}$). Tipp: $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BA} + \ldots$

2. Gegeben ist das Dreieck ABD mit $A(-1|-1|1)$, $B(2|-2|1)$ und $D(2{,}5|-0{,}5|1)$.

   (a) Berechnen Sie die Längen der drei Seiten und die drei Innenwinkel.

   (b) Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes C, so dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

   (c) Berechnen Sie das Vektorprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$. Welche Bedeutung hat dieses Vektorprodukt? Warum war die besondere Lage dieses Vektors bereits aus den gegebenen Koordinaten ersichtlich?

   (d) Das Dreieck ABD wird nun in die x_1x_2-Grundebene projiziert und somit jetzt das Dreieck $A'B'D'$ mit $A'(-1|-1)$, $B'(2|-2)$, $D'(2{,}5|-0{,}5)$ betrachtet.

   Welche besondere Rolle spielt für dieses Dreieck der Kreis mit der Gleichung $(x_1 - 0{,}75)^2 + (x_2 + 0{,}75)^2 = \frac{25}{8}$?

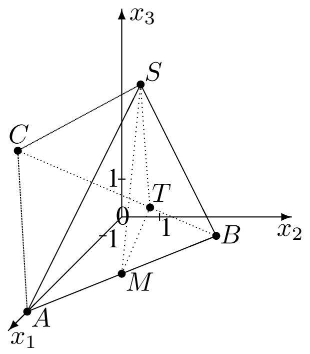
3. Geben Sie die Gleichung der Kugel um $M(3|-5|0)$ mit Radius 6 an, und prüfen Sie, ob der Ursprung $O(0|0|0)$ innerhalb, auf oder außerhalb der Kugel liegt.

4. Berechnen Sie den Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. Klasse Lösungen — 11
Koordinatengeometrie: Vektoren — 04

1. (a) $\vec{M} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$, also $M(4|2|0{,}5)$.
$\overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, d. h. $\vec{T} - \vec{C} = \frac{2}{3}(\vec{B} - \vec{C})$, also
$\vec{T} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3-1{,}5 \\ 4-(-2) \\ 1-2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$, $T(2{,}5|2|1{,}5)$.

(b)



(c) $V_{ABCS} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AS}| =$
$= \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ -2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right| =$
$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 12 \\ 1{,}5 \\ 18 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-24+3+90| = \frac{23}{2}$.
Analog $V_{MBTS} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{MT}) \circ \overrightarrow{MS}| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}25 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}\right| = \frac{23}{12}$.

(d) $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} =$
$= \frac{1}{3}(-\vec{v} + \vec{u}) - \vec{u} + \vec{w} = -\frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} + \vec{w}$.

2. (a) $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+1+0} = \sqrt{10}$.
Analog $\overline{BD} = |\vec{D} - \vec{B}| = \sqrt{0{,}25 + 2{,}25 + 0} = \sqrt{2{,}5} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$,
$\overline{AD} = |\vec{D} - \vec{A}| = \sqrt{12{,}25 + 0{,}25 + 0} = \sqrt{12{,}5} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$.
$\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$: $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{3 \cdot 3{,}5 + (-1) \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{12{,}5}} \approx 0{,}894$, also $\alpha \approx 26{,}6°$.
$\beta = \sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$: $\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{-3 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 1{,}5 + 0 \cdot 0}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{2{,}5}} = 0$, also $\beta = 90°$.
Gemäß der Winkelsumme im Dreieck ist $\delta = 180° - \alpha - \beta \approx 63{,}4°$.

(b) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, also $\vec{C} = \vec{D} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $C(5{,}5|-1{,}5|1)$.

(c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Die Länge 5 dieses Vektorprodukts ist die Fläche des Parallelogramms $ABCD$.
Die x_3-Richtung dieses Vektors musste sich ergeben, da $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ senkrecht auf $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ steht, also senkrecht auf der Parallelogramm-Fläche, und dieses liegt wegen der gemeinsamen x_3-Koordinate in der zur x_1x_2-Grundebene parallelen Ebene $x_3 = 1$.

(d) $A'B'D'$ ist ebenso wie ABD ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Ecken auf dem Thaleskreis über $[A'D']$ liegen, also mit Mittelpunkt $M'(0{,}75|-0{,}75)$ (aus $\vec{M}' = \frac{1}{2}(\vec{A}' + \vec{D}')$) und Radius $r = \frac{1}{2}\overline{A'D'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{2} = \frac{5}{4}\sqrt{2}$ (also $r^2 = \frac{25}{16} \cdot 2 = \frac{25}{8}$).

3. $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - (-5))^2 + (x_3 - 0)^2 = 6^2$, also $(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 5)^2 + x_3^2 = 36$ (bzw. ausquadriert $x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 + 10x_2 + x_3^2 = 2$).
Wegen $\overline{MO} = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 0} = \sqrt{34} < 6$ liegt O innerhalb der Kugel.

4. $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1}{\sqrt{16+9+0} \cdot \sqrt{4+4+1}} \approx -0{,}133$, also $\varphi \approx 97{,}7°$.