11. Klasse Übungsaufgaben	**11**
Wurzelfunktion, Umkehrung, Parameter	**05**

1. Gegeben ist die Funktion mit $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

   Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an, zeichnen Sie den Funktionsgraphen und begründen Sie, dass sich tatsächlich genau ein Halbkreis ergibt, also eine Figur, deren Punkte alle den gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben.

2. Skizzieren Sie die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $D_f =]-\infty; 2]$ (siehe grund114.pdf), nämlich $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-1}$, $D_{f^{-1}} = [1; \infty[$,

   (a) indem Sie beschreiben, wie f^{-1} durch Verschiebungen und Streckungen aus der gewöhnlichen Wurzelfunktion mit $y = \sqrt{x}$ hervorgeht,

   (b) durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I./III. Quadranten.

   (c) Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Steigung $f'(a)$ in dem auf dem Graphen von f liegenden Punkt $(a|b)$ und der Steigung $(f^{-1})'(b)$ im entsprechenden Punkt der Umkehrfunktion.

3. Berechnen Sie den Term der Umkehrfunktion: $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$.

4. Beim Funktionsterm $f(x) = x^3 + 5x + 7$ ist zwar die explizite Angabe des Terms der Umkehrfunktion (zumindest mit Schulmethoden) nicht möglich; trotzdem kann gesagt werden, dass die dadurch gegebene Funktion umkehrbar ist, und zwar mit Hilfe der Steigung. Führen Sie diese Betrachtung durch!

5. Gegeben sind die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = 2kx + 3$ mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}$ und die Parabel p mit $p(x) = x^2 - 2x + 5$.

   Welche der Geraden ist parallel zur Tangente an p im Punkt $Q(2|5)$?

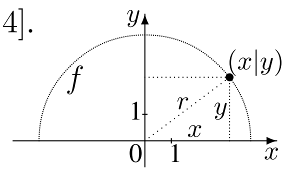
6. Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a^2}x^3 - \frac{3}{a}x^2 - 9x + 5(a+1)$ mit dem negativen Parameter $a < 0$.

   (a) Untersuchen Sie die Lage des Maximums!

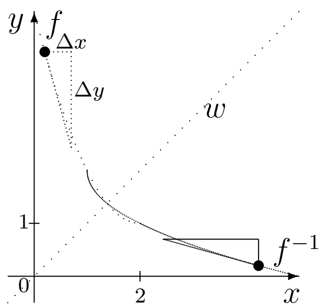
   (b) Zeigen Sie, dass die Maxima aller Scharkurven auf einer Geraden liegen, und geben Sie deren Gleichung an.

11. Klasse Lösungen — 11
Wurzelfunktion, Umkehrung, Parameter — 05

1. Definitionsbereich: $16 - x^2 \geq 0$, also $x^2 \leq 16$, also $D_f = [-4; 4]$.
   Abstand des Punktes $(x|y) = (x|f(x)) = (x|\sqrt{16 - x^2})$ vom Nullpunkt gemäß Pythagoras:
   $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{16 - x^2})^2} = \sqrt{x^2 + 16 - x^2} = 4$.



2. (a) Wegen „–“ wird die Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$ an der x-Achse gespiegelt, wegen „$x - 1$“ um 1 nach rechts verschoben und wegen „$+2$“ um 2 in y-Richtung verschoben.
   (b) Spiegeln an w: Aus z. B. $(0{,}2|4{,}24)$ wird $(4{,}24|0{,}2)$.
   (c) Eingezeichnet ist nebenstehend auch ein Steigungsdreieck sowie das gespiegelte Steigungsdreieck. Dabei wird aus $f'(0{,}2) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ beim Spiegeln $(f^{-1})'(4{,}24) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, allgemein also $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.



3. $y = \frac{x-3}{x+1}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
   Den Wertebereich findet man mit Hilfe einer kleinen Skizze oder im Laufe der Aufgaben-Bearbeitung.
   Variablentausch: $x = \frac{y-3}{y+1}$, $y \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
   Auflösen (mit HN multiplizieren, gesuchte Variablen-Stücke auf eine Seite):
   $x(y + 1) = y - 3$; $xy + x = y - 3$; $3 + x = y - xy$; $3 + x = y(1 - x)$; $y = \frac{3+x}{1-x}$
   Also: $f^{-1}(x) = \frac{3+x}{1-x}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

4. Für die Umkehrbarkeit ist notwendig, dass man zu jedem y-Wert von W_f **genau einen** x-Wert hat. Wenn eine Funktion streng monoton ist, dann hat sie diese Eigenschaft. Hier: $f'(x) = 3x^2 + 5 > 0$ für alle x, also ist die Funktion streng monoton steigend und somit umkehrbar.

5. $p'(x) = 2x - 2$. Steigung der Tangente in Q: $m = p'(2) = 2$.
   Steigung der Geraden: $f_k'(x) = 2k$, diese muss für Parallelität gleich 2 sein:
   $2k = 2$, also $k = 1$.

6. (a) $f_a'(x) = \frac{1}{a^2} \cdot 3x^2 - \frac{3}{a} \cdot 2x - 9 = \frac{3}{a^2}x^2 - \frac{6}{a}x - 9$. $f_a'(x) = 0$ liefert:
   $$x_{1/2} = \frac{\frac{6}{a} \pm \sqrt{\frac{36}{a^2} - 4 \cdot \frac{3}{a^2} \cdot (-9)}}{2 \cdot \frac{3}{a^2}} = \left(\frac{6}{a} \pm \frac{12}{a}\right) \cdot \frac{a^2}{6}\text{, also } x_1 = 3a,\ x_2 = -a.$$

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
steigt	$3a$	fällt	$-a$	steigt

   Für die Vorzeichenbereiche beachte man, dass $3a$ „links“ von $-a$ liegt, da a negativ ist, und dass die durch die Ableitung f' gegebene Parabel (wegen $\frac{3}{a^2} > 0$) nach oben geöffnet ist, also die Vorzeichenabfolge „$+ - +$“ hat.
   Also Maximalstelle $x = 3a$ mit y-Wert $f_a(3a) = \frac{1}{a^2} \cdot (3a)^3 - \frac{3}{a} \cdot (3a)^2 - 9 \cdot 3a + 5(a + 1) = 27a - 27a - 27a + 5a + 5 = -24a + 5$.
   (b) Löst man die Gleichung für den x-Wert des Maximums $x = 3a$ nach a auf (also $a = \frac{x}{3}$) und setzt in die Gleichung für den y-Wert $y = -24a + 5$ ein, so erhält man $y = -24 \cdot \frac{x}{3} + 5 = -8x + 5$. Die Maxima liegen also alle auf der Geraden $y = -8x + 5$.