| 11. Klasse Übungsaufgaben | 11 |
|---|---|
| **Differentiationsregeln** | **06** |

1. Differenzieren Sie:
   (a) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+2}$
   (c) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$
   (e) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)$
   (f) $f(x) = \dfrac{4}{3x-2}$
   (g) $f(x) = (7x-1)^4 \cdot x^{-2}$
   (h) $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$
   (i) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(2x-1)^2}$

2. Differenzieren Sie und betrachten Sie den Definitionsbereich von $f(x)$ und $f'(x)$:
   $f(x) = \sqrt{1-4x^2}$

3. Differenzieren Sie $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, fertigen Sie eine Skizze und zeichnen Sie darin die Tangente im Punkt $(0|1)$ (mit Steigung $f'(0)$) ein.

   In der Nähe dieses Punktes stimmen Funktion und Tangente etwa überein. Welche Näherung ergibt sich damit?

   Diese Näherung wird in der Relativitätstheorie benötigt. Dabei ist $x = (\frac{v}{c})^2$, und man betrachtet $E = mc^2$ mit der relativistischen Masse $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$.

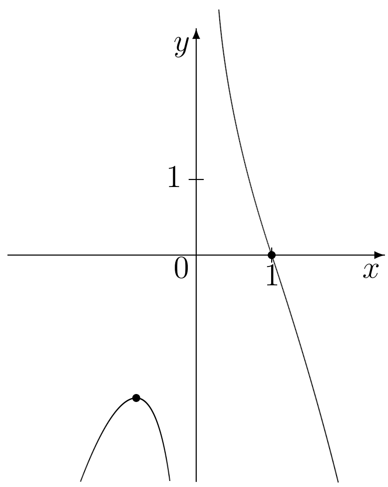
   Was liefert dann die Anwendung der obigen Näherung?

4. Bestimmen Sie für $f(x) = \frac{1}{5}x + \cos(2x)$, $D_f = [0; \pi]$, die steilste Stelle des Graphen.

5. Betrachten Sie für

$$f(x) = \frac{1}{x} - x^2$$

   Definitionsbereich, Verhalten in der Nähe der Definitionslücke, Nullstellen, Extrema und Monotonie und bestätigen Sie damit die Gestalt des nebenstehend dargestellten Graphen.
   Wie verhält sich dieser für $x \to \pm\infty$?

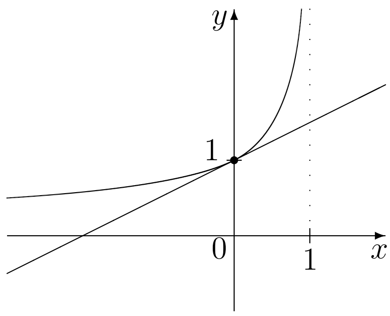


| 11. Klasse Lösungen | 11 |
|---|---|
| **Differentiationsregeln** | **06** |

1. (a) $f'(x) = -x^2 \sin x + 2x \cos x$ (b) $f'(x) = \frac{(2x+2)\cdot 2x - x^2 \cdot 2}{(2x+2)^2} = \frac{2x^2+4x}{(2x+2)^2}$
   (c) $f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ (d) $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
   (e) $f(x) = \sin(\frac{1}{2\pi}x)$, also $f'(x) = \cos(\frac{1}{2\pi}x) \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cos(\frac{x}{2\pi})$
   (f) $f(x) = 4 \cdot (3x-2)^{-1}$, also $f'(x) = 4 \cdot (-1) \cdot (3x-2)^{-2} \cdot 3 = -\frac{12}{(3x-2)^2}$
   (g) $f'(x) = (7x-1)^4 \cdot (-2)x^{-3} + 4(7x-1)^3 \cdot 7 \cdot x^{-2} = \frac{(7x-1)^3(14x+2)}{x^3}$
   (h) $f'(x) = \frac{(2x-1)\cdot 2 - (2x+1)\cdot 2}{(2x-1)^2} = -\frac{4}{(2x-1)^2}$
   (i) $f'(x) = \frac{(2x-1)^2 \cdot 2 - (2x+1)\cdot 2(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^4} = \frac{2(2x-1) - 4(2x+1)}{(2x-1)^3} = \frac{-4x-6}{(2x-1)^3}$

2. $f(x) = (1-4x^2)^{1/2}$; $f'(x) = \frac{1}{2}(1-4x^2)^{-1/2} \cdot (-8x) = -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$
   Für die Wurzel muss $1 - 4x^2 \geq 0$ gelten, also $x^2 \leq \frac{1}{4}$, also $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.
   Da bei $f'$ dieser Ausdruck im Nenner steht, ist dort sogar $1 - 4x^2 > 0$ zu verlangen.
   Somit: $D_f = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$; $D_{f'} = ]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$

3. $f(x) = (1-x)^{-1/2}$; $f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}$.
   $f'(0) = \frac{1}{2}$, die Tangente hat also die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 1$.




Näherung:
Für „kleine“ $x$ (nahe 0) gilt $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{2}x + 1$
Anwendung auf $E = mc^2 = m_0c^2\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$:
Für kleine $v/c$, d. h. für Geschwindigkeiten $v$, die klein sind im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit $c$, gilt: $E \approx m_0c^2(\frac{1}{2}(v/c)^2 + 1) = \frac{1}{2}m_0v^2 + m_0c^2$
(Die Gesamtenergie setzt sich zusammen aus der Ruheenergie $m_0c^2$ und der kinetischen Energie)

4. Die Steigung von $f$ ist gegeben durch $f'(x) = 0{,}2 - \sin(2x) \cdot 2$; $f'$ ist am größten, wenn $\sin$ am kleinsten ist, also wenn $\sin(2x) = -1$, d. h. $2x = \frac{3\pi}{2}$, d. h. $x = \frac{3\pi}{4}$.

5. Verschiedene Schreibweisen für den Funktionsterm: $f(x) = \frac{1}{x} - x^2 = \frac{1-x^3}{x} = x^{-1} - x^2$.
   $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
   $\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x) = “\frac{\pm 1}{\pm 0}” \to \pm\infty$ (Senkrechte Asymptote, Pol 1. Ordnung $x = 0$)
   Nullstelle: $f(x) = 0$: $1 - x^3 = 0$; $x = 1$
   Extremum und Monotonie: $f'(x) = -x^{-2} - 2x = \frac{-1-2x^3}{x^2}$
   $f'(x) = 0$: $-1 - 2x^3 = 0$; $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

| $f' > 0$ | | $f' < 0$ | | $f' < 0$ |
|---|---|---|---|---|
| steigt | $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ | fällt | 0 | fällt |
| | Max | | $\notin D$ | |
| | $(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \mid -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2})$ | | | |

Für $x \to \pm\infty$ ist $\frac{1}{x} \to 0$, also schmiegt sich der Graph von $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$ an die Parabel $y = -x^2$ an (also auch $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to -\infty$).