



11. Klasse Übungsaufgaben	11
e-Funktion	07

1. Differenzieren Sie:

(a) $f_1(x) = e^{5x-3}$

(b) $f_2(x) = e^{-x}$

(c) $f_3(x) = (x^2 - 2)e^x$

(d) $f_4(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}$

(e) $f_5(x) = e^{x \sin x}$

(f) $f_6(x) = xe^{\sin x}$

2. Finden Sie Stammfunktionen:

(a) $f(x) = 3e^{3x}$

(b) $g(x) = 6e^{3x+1}$

(c) $h(x) = 2xe^{-x^2}$

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $e^x = 10$

(b) $(11x - 12)e^{13x-14} = 0$

(c) $5xe^x + (x^2 + 4)e^x = 0$

(d) $e^{2x} = 3e^x$

4. (Abwandlung einer Aufgabe aus dem Grundkurs-Abitur Baden-Württemberg 1992)

Kraftfahrzeuge erzeugten weltweit 1990 ca. 2,75 Milliarden Tonnen CO₂. Der CO₂-Ausstoß $g(t)$ in Milliarden Tonnen zur Zeit t (in Jahren nach 1990) soll zunächst beschrieben werden durch $g(t) = 2,75 \cdot a^t$.

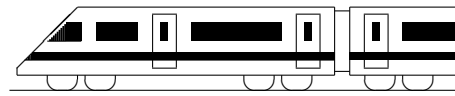
(a) Geben Sie a an, wenn der CO₂-Ausstoß jährlich um 2,1 % steigt. Wie groß ist dann der CO₂-Ausstoß im Jahr 2030?

(b) Schreiben Sie den Funktionsterm auch in der Form $g(t) = 2,75e^{kt}$. Berechnen Sie $g'(40)$ und geben Sie die anschauliche Bedeutung dieser Größe an.

(c) Nun soll der CO₂-Ausstoß beschrieben werden durch $h(t) = 4,17 - 1,42e^{-0,041t}$. Zeigen Sie, dass sich für diesen Term die (ungefähr) gleichen „Startbedingungen“ $h(0) = g(0)$ und $h'(0) \approx g'(0)$ ergeben. Welcher Unterschied ergibt sich bei dieser Modellierung auf lange Sicht?

5. Untersuchen Sie $f(x) = (0,5 - x)e^{1-x}$ auf Nullstellen, Extrema und Verhalten im Unendlichen.

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und der Werte $f(0)$ und $f(1)$.



11. Klasse Lösungen	11
e-Funktion	07

1.

(a) $f'_1(x) = 5e^{5x-3}$ (Kettenregel)

(b) $f'_2(x) = -e^{-x}$ (Kettenregel)

(c) $f'_3(x) = (x^2 - 2)e^x + 2xe^x = (x^2 + 2x - 2)e^x$ (Produktregel)

(d) $f'_4(x) = \frac{(e^x+1)2e^{2x} - (e^{2x}-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{3x} + 2e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2}$ (Quotientenregel)

(e) $f'_5(x) = e^{x \sin x} \cdot (\sin x + x \cos x)$

(f) $f'_6(x) = 1 \cdot e^{\sin x} + x e^{\sin x} \cdot \cos x = (1 + x \cos x)e^{\sin x}$

((e) und (f) mit Produkt- und Kettenregel)

2.

(a) $F(x) = e^{3x} + C$ (Probe durch Differenzieren bestätigt die Richtigkeit des

(b) $G(x) = 2e^{3x+1} + C$ jeweiligen Ansatzes)

(c) $H(x) = -e^{-x^2} + C$

3.

(a) Beidseitiges Logarithmieren liefert: $x = \ln 10 \approx 2,3$

(b) Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, also $11x - 12 = 0$ oder $e^{13x-14} = 0$; da die e-Funktion nie 0 wird, bleibt nur $x = \frac{12}{11}$.

(c) e^x ausklammern: $(5x + x^2 + 4)e^x = 0$.

Wieder kann e^x nicht 0 werden, also bleibt $x^2 + 5x + 4 = 0$, $x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$, also $x_1 = -1$, $x_2 = -4$.

(d) Wir schreiben $e^{2x} = (e^x)^2$, bringen alles auf eine Seite und klammern e^x aus: $(e^x)^2 - 3e^x = 0$; $e^x(e^x - 3) = 0$.

Wieder e^x nicht 0, also $e^x - 3 = 0$, $e^x = 3$, $x = \ln 3 \approx 1,1$.

4.

(a) Zunahme um 2,1 % heißt Mult. mit $a = 1,021$, also $g(t) = 2,75 \cdot 1,021^t$.

40 Jahre nach 1990 ergibt sich $g(40) = 2,75 \cdot 1,021^{40} \approx 6,31$.

(Fortsetzung 4.)

(b) $g(t) = 2,75 \cdot 1,021^t = 2,75 \cdot e^{\ln(1,021^t)} = 2,75 e^{t \cdot \ln 1,021} = e^{kt}$ mit $k = \ln 1,021 \approx 0,021$.

$g'(t) = 2,75 \cdot \ln 1,021 \cdot e^{\ln 1,021 t}$, also $g'(40) = \dots \cdot e^{\ln 1,021 \cdot 40} \approx 0,13$.

 $g'(40)$ beschreibt die Änderungsrate im Jahr 2030, d.h. um wie viele Milliarden Tonnen der CO_2 -Ausstoß im Jahr 2030 pro Jahr zunimmt.

(c) $h(0) = 2,75 = g(0)$.

$g'(0) = 2,75 \cdot \ln 1,021 \cdot 1 \approx 0,057$, $h'(t) = -1,42 \cdot (-0,041) e^{-0,04t}$, also $h'(0) = -1,42 \cdot (-0,041) \cdot 1 \approx g'(0)$.

Die Werte von $g'(t)$ werden mit zunehmendem t immer größer, d. h. die Kurve g wird immer steiler; dagegen werden die (positiven) Werte von $h'(t)$ immer kleiner, d. h. die Kurve h steigt zwar, wird aber immer flacher; $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) \rightarrow \infty$, aber h nähert sich einem Grenzwert: $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 4,17$.

5.

Nullstellen: $f(x) = (0,5 - x)e^{1-x} = 0$;

e-Fkt. nicht 0, also $0,5 - x = 0$; $x = 0,5$.

Extrema: Produktregel: $f'(x) = (-1)e^{1-x} + (0,5 - x)e^{1-x} \cdot (-1) = (-1 - 0,5 + x)e^{1-x}$; $f'(x) = 0$; $x = 1,5$. $\frac{f'}{f} < 0$ | $\frac{f'}{f} > 0$
fällt | 1,5 steigt

Also Min $(1,5 | -e^{-0,5}) \approx (1,5 | -0,61)$.

Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{(0,5 - x)}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(0,5 - x)}_{\rightarrow -\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\rightarrow 0} = 0$ (denn e-Fkt. kon-

vergiert stärker); also $y = 0$ (x -Achse) waagrechte Asymptote für $x \rightarrow +\infty$.

$f(0) = 0,5e \approx 1,36$

$f(1) = -0,5$

