



11. Klasse Übungsaufgaben	11
ln-Funktion	08

1. Differenzieren Sie und bestimmen Sie den Definitionsbereich:

(a) $f_1(x) = \ln(4x + 10)$

(d) $f_4(x) = (x - e) \ln x$

(b) $f_2(x) = \ln(-x)$

(e) $f_5(x) = \ln\left(\frac{2x+5}{x-1}\right)$

(c) $f_3(x) = 3 \ln(x^2)$

(f) $f_6(x) = e^x \cdot \ln(7 - x)$

2. Bestätigen Sie durch Differenzieren, dass $F(x) = x \ln x - x + C$ Stammfunktion von $f(x) = \ln x$ ist, und finden Sie durch Anwenden entsprechender Rechenregeln Stammfunktion und Ableitung von $h(x) = \log_{10} x$.

3. Finden Sie Stammfunktionen:

(a) $f(x) = 2 - \frac{7}{x}$

(b) $g(x) = \frac{x-11}{x^2}$

4. Lösen Sie die folgenden (Un-)Gleichungen:

(a) $\ln x = -2$

(b) $\ln(x^2 - 1) = 10$

(c) $1 - 0,99^x > 0,9$

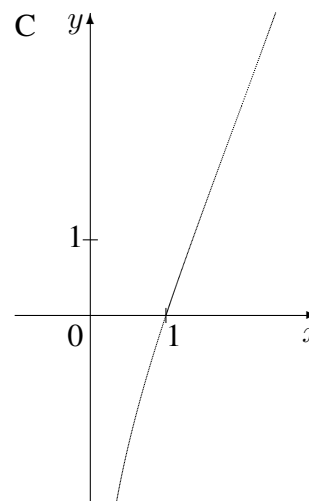
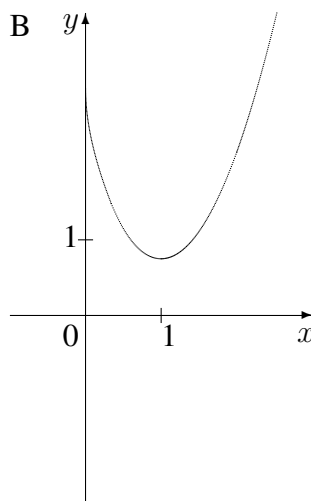
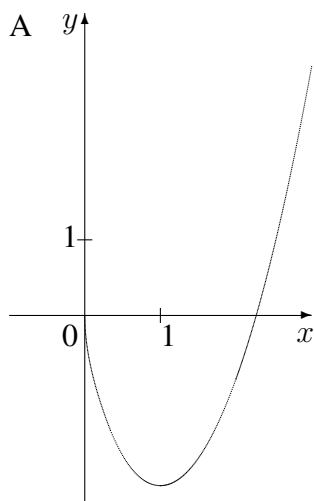
5. Begründen Sie mit Hilfe der Ableitung, dass die Funktion $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$, $D_f =]1; \infty[$, umkehrbar ist.

Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion.

6. Untersuchen Sie $f(x) = (x+2) \ln x$ auf Definitionsbereich, Nullstellen und Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.

Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $(2|?)$.

Begründen Sie, welcher der folgenden Graphen zur Funktion f gehört. Welche könnten Stammfunktionen von f darstellen?



Zeigen Sie, dass durch $F(x) = (0,5x^2 + 2x) \ln x - 0,25x^2 - 2x$ eine Stammfunktion von f gegeben ist, und berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0+0} F(x)$.



11. Klasse Lösungen	11
ln-Funktion	08

1.

(a) $D: 4x + 10 > 0; x > -2,5;$

$$D =] - 2,5; \infty[.$$

$$f'_1(x) = \frac{1}{4x+10} \cdot 4 = \frac{2}{2x+5}$$

(b) $D: -x > 0; x < 0; D =] - \infty; 0[.$

$$f'_2(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

(c) $D: x^2 > 0; x \neq 0; D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

$$f'_3(x) = 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{6}{x}$$

(oder mit $f_3(x) = 3 \cdot 2 \ln(x)$)

(d) $D: x > 0, D = \mathbb{R}^+ =]0; \infty[.$

$$f'_4(x) = (x - e) \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x$$

(e) $D: v(x) = \frac{2x+5}{x-1} > 0.$

Vorzeichenbereiche (vgl. grund107.pdf):

$$\frac{v > 0}{-2,5} \quad \frac{v < 0}{1} \quad \frac{v > 0}{1}$$

Also $D =] - \infty; -2,5[\cup]1; \infty[.$

$$f_5(x) = \ln(2x + 5) - \ln(x - 1)$$

$$f'_5(x) = \frac{1}{2x+5} \cdot 2 - \frac{1}{x-1}$$

(f) $D: 7 - x > 0; x < 7; D =] - \infty; 7[.$

$$f'_6(x) = e^x \cdot \frac{1}{7-x} \cdot (-1) + e^x \cdot \ln(7-x)$$

((d) und (f) Ableitung mit Produktregel)

2.

Produktregel:

$$F'(x) = x^{\frac{1}{x}} + 1 \cdot \ln x - 1 = \ln x = f(x)$$

$$h(x) = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}, \text{ also}$$

Stammfunktion $H(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot (x \ln x - x) + C$

und Ableitung $h'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x}.$

3.

(a) $F(x) = 2x - 7 \ln x + C$

(b) $g(x) = \frac{x-11}{x^2} = \frac{1}{x} - 11x^{-2}, \text{ also}$

$$G(x) = \ln x + 11x^{-1}$$

4.

(a) $\ln x = -2; x = e^{-2}$

(b) $\ln(x^2 - 1) = 10; x^2 - 1 = e^{10};$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{e^{10} + 1}$$

(c) $0,9 < 1 - 0,99^x; 0,99^x < 0,1;$

$$\ln 0,99^x < \ln 0,1; x \ln 0,99 < \ln 0,1;$$

$$x > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,99}; x > 229,1 \dots$$

5.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln x - \ln(x-1),$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)} < 0 \text{ für alle } x \in D_f =$$

 $]1; \infty[$, also ist f in diesem Bereich streng monoton fallend und daher umkehrbar.

$$y = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right);$$

$$x \leftrightarrow y:$$

$$x = \ln\left(\frac{y}{y-1}\right);$$

$$e^x = \frac{y}{y-1};$$

$$(y-1)e^x = y;$$

$$ye^x - e^x - y = 0;$$

$$y(e^x - 1) = e^x;$$

$$y = \frac{e^x}{e^x - 1}; \quad f^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

6.

$$D_f = \mathbb{R}^+ =]0; \infty[.$$

Nullstellen: $f(x) = (x+2) \ln x = 0;$

$$(x+2) = 0 \text{ oder } \ln x = 0;$$

 $x = -2$ oder $x = 1$; da -2 nicht im Definitionsbereich liegt, bleibt nur Nullstelle $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow -\infty; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow \infty.$$

Produktregel: $f'(x) = (x+2) \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x.$

Tangente im Punkt $P(2; 4 \ln 2):$

$$m = f'(2) = 2 + \ln 2.$$

Also Ansatz $y = (2 + \ln 2)x + t.$

$$P: 4 \ln 2 = (2 + \ln 2) \cdot 2 + t, \text{ also } t = 2 \ln 2 - 4.$$

Somit Tangente: $y = (2 + \ln 2)x + 2 \ln 2 - 4.$

Aufgrund der Limes gehört zu f der Graph C. Sowohl A als auch die um 3 Einheiten nach oben verschobene Funktion B sind Stammfunktionen, da deren Steigungsverhalten durch das Vorzeichen von f richtig beschrieben wird. F ist Stammfunktion, denn (Produktregel):

$$F'(x) =$$

$$= (0,5x^2 + 2x) \frac{1}{x} + (x+2) \ln x - 0,5x - 2 =$$

$$= (0,5x + 2) + (x+2) \ln x - 0,5x - 2 =$$

$$= (x+2) \ln x = f(x).$$

 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$ (denn das Polynom $0,5x^2 + 2x$ konvergiert stärker als die ln-Funktion).