11. Klasse Übungsaufgaben — 11
Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit — 09

1. Die folgenden drei Kolmogorow-Axiome sind für Wahrscheinlichkeiten fundamental:

   (1) $P(\Omega) = 1$,
   (2) $P(E) \geq 0$ für alle Ereignisse E,
   (3) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ für alle Ereignisse E_1, E_2 mit $E_1 \cap E_2 = \{\}$.

   Folgern Sie nur aus (1)–(3) die Rechenregel $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Bei einer Verkehrskontrolle wird ein Fahrrad zufällig herausgegriffen und auf Funktionsfähigkeit von Vorder- bzw. Rücklicht untersucht. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwar das Vorder-, aber nicht das Rücklicht funktioniert, betrage $0{,}057$. Die Wahrscheinlichkeit, ein Fahrrad mit defektem Rücklicht herauszugreifen, sei $0{,}06$.

   (a) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der beiden Lichter defekt ist, sei $0{,}09$. Zeigen Sie, dass dann in Hinblick auf die Funktionsfähigkeit Vorder- und Rücklicht nicht unabhängig sind.

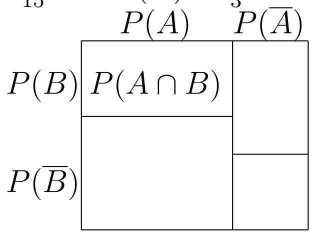
   (b) Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen der beiden Defekte sein müsste, damit sich Unabhängigkeit ergibt.

3. Es werden die Essenswünsche der Besucher einer Kantine betrachtet, in der unter anderem Currywurst angeboten wird. Sei E_i: „Spätestens der i-te Besucher wünscht Currywurst“. Es sei $P(E_i) = 1 - 0{,}6^i$.

   Formulieren Sie $\overline{E_3}$ und $\overline{E_3} \cap E_4$ in Worten; berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten.

4. Für zwei Ereignisse A und B gelte $P(A) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$ und $P(B) = \frac{1}{3}$. Berechnen Sie $P(A \cup B)$.

   Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten in einem Diagramm der nebenstehenden Art dar, in dem die Wahrscheinlichkeiten durch entsprechend große Flächeninhalte wiedergegeben sind. Woran erkennt man, ob Unabhängigkeit vorliegt?



5. (Aus dem Abitur 1988)

   Zu jedem Ziffernschloss gehört eine „Geheimzahl“, mit der das Schloss geöffnet werden kann. Im Folgenden werden als Geheimzahlen vierstellige Zahlen verwendet, die aus den Ziffern 1 bis einschließlich 7 gebildet werden können. Dabei wird die Produktion so gesteuert, dass alle möglichen Geheimzahlen gleichwahrscheinlich sind.

   Betrachtet werden die Ereignisse

   Z: „Die Geheimzahl enthält genau zwei gleiche Ziffern“ und

   U: „Die Geheimzahl besteht nur aus ungeraden Ziffern“

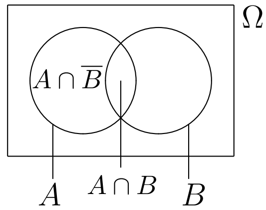
   (a) Berechnen Sie $P(Z)$.

   (b) Sind die Ereignisse Z und U unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man ein Element aus U, wenn man nur aus den Elementen von Z zufällig auswählt?

11. Klasse Lösungen — 11
Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit — 09

1. Betrachtet man das nebenstehende Diagramm, so sieht man $A \cup B = (\underbrace{A \cap \overline{B}}_{E_1}) \cup \underbrace{B}_{E_2}$, wobei dann $E_1 \cap E_2 = \{\}$, wende also Axiom (3) an: $P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B)$.
Ebenso ist $A = (\underbrace{A \cap \overline{B}}_{E_1}) \cup (\underbrace{A \cap B}_{E_2})$ disjunkt und somit



$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$, also $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.
Hieraus folgt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. (a) V: Vorderlicht defekt. R: Rücklicht defekt.
Vierfeldertafel: Man macht sich zuerst klar, dass die W. von mindestens einem Defekt $P(R \cup V)$ durch drei der Felder gegeben ist, so dass für das vierte Feld $P(\overline{R} \cap \overline{V}) = 1 - 0{,}09$ bleibt. Zeilen- und spaltenweise können die restlichen Felder ergänzt werden.

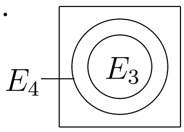
	V	$\overline{V}$	
R	0,003	0,057	0,06
$\overline{R}$	0,03	0,91	0,94
	0,033	0,967	1

Man erkennt die Abhängigkeit: $P(V) \cdot P(R) = 0{,}033 \cdot 0{,}06 \neq 0{,}003 = P(V \cap R)$.

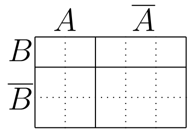
(b) Im Fall von Unabhängigkeit müsste für die gegebene Größe gelten:
$P(R \cap \overline{V}) = P(R) \cdot P(\overline{V})$, also $0{,}057 = 0{,}06 \cdot P(\overline{V})$, also $P(\overline{V}) = \frac{0{,}057}{0{,}06} = 0{,}95$, also $P(\overline{R} \cap \overline{V}) = 0{,}94 \cdot 0{,}95 = 0{,}893$, also $P(R \cup V) = 1 - 0{,}893 = 0{,}107$.

3. $\overline{E_3}$: „Frühestens der 4. Besucher wünscht Currywurst“ oder „Die ersten 3 Besucher wünschen nicht Currywurst.

$\overline{E_3} \cap E_4$: „Der vierte Besucher ist der erste, der Currywurst wünscht“.
$P(\overline{E_3}) = 1 - P(E_3) = 1 - (1 - 0{,}6^3) = 0{,}216$.
Es ist E_3 Teilmenge von E_4 und daher
$P(\overline{E_3} \cap E_4) = P(E_4) - P(E_3) = 1 - 0{,}6^4 - (1 - 0{,}6^3) = 0{,}0864$



4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = 0{,}6$.
A, B unabhängig: $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} = P(A \cap B)$.
Im Bild ist dies daran erkennbar, dass die „Teilungslinie“ auf gleicher Höhe verläuft, was bedeutet, dass der Anteil der B unter den A (also $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$) gleich dem Anteil der B unter der Gesamtmenge ist ($= P(B)$).



5. (a) $\Omega = \{1111, \ldots, 7777\}$, also (Zählprinzip → grund55.pdf): $|\Omega| = 7^4 = 2401$.
Für die Anordnungsmöglichkeiten der gleichen Ziffern gibt es 6 Möglichkeiten (11xy, 1x1y, 1xy1, x11y, x1y1, xy11).
Es gibt 7 Möglichkeiten für die Wahl der beiden gleichen Ziffern, dann noch 6 Möglichkeiten für die zweite und dann noch 5 Möglichkeiten für die dritte Ziffer.
Also $|Z| = 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1260$, somit $P(Z) = \frac{1260}{2401} \approx 0,525$.

(b) Es gibt 4 ungerade Ziffern 1, 3, 5, 7, also $P(U) = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401}$.
Entsprechend zu Teilaufgabe (a) überlegt man: $|U \cap Z| = 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 144$.
$P(U \cap Z) = \frac{144}{2401} \approx 0{,}060$, aber $P(U) \cdot P(Z) = \frac{256}{2401} \cdot \frac{1260}{2401} \approx 0{,}056$. Also sind U und Z abhängige Ereignisse.

(c) $P_Z(U) = \frac{P(U \cap Z)}{P(Z)} = \frac{144}{1260} \approx 0{,}114$.