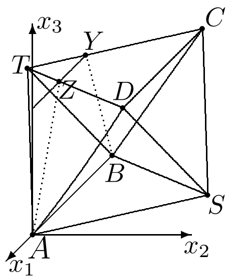
12. Klasse Übungsaufgaben — 12
Lagebeziehung Ebene – Ebene — 10

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen; falls sie parallel sind, bestimmen Sie den Abstand; falls sie sich schneiden, Schnittgerade und Schnittwinkel.
   (a) $E_1 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$ und $E_2 : 4x_1 - x_2 + 8x_3 = 9$
   (b) $E_1 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$ und $E_2 : -x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 6$
   (c) $E_1 : 14x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ und $E_2 : 3{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 1$

2. Geben Sie zur Ebene $E : x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4$ die Gleichung einer Ebene F an, die darauf senkrecht steht und die Gerade $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, enthält.

3. In der Situation von ueb128.pdf/Aufgabe 4 ist durch die Punkte $A(0|0|0)$, $B(-6|0|0)$, $C(-6|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$, $D(0|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$, $S(-3|3\sqrt{3}|0)$ und $T(-3|-\sqrt{3}|2\sqrt{6})$ ein Oktaeder gegeben. Dabei sind alle Kanten gleich lang (z. B. $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \sqrt{(-6-0)^2 + 0^2 + 0^2} = 6$, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{0 + (2\sqrt{3}-0)^2 + (2\sqrt{6}-0)^2} = 6$), und die Querschnittsflächen (z. B. $ABCD$) sind Quadrate (z. B. $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = (-6) \cdot 0 + 0 \cdot 2\sqrt{3} + 0 \cdot 2\sqrt{6} = 0$, also $\sphericalangle BAD = 90°$).



   (a) Die Ebene ASD hat die Gleichung $E_{ASD} : \sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = 0$. Zeigen Sie, dass die durch die Punkte B, C und T gegebene Ebene parallel zu E_{ASD} ist.
   (b) Die im Oktaeder liegende Kugel um $M(-3|\sqrt{3}|\sqrt{6})$ mit Radius $\sqrt{6}$ berührt alle Seitenflächen, z. B. die Seitenfläche BCT im Punkt $Q(-5|\frac{1}{3}\sqrt{3}|\frac{4}{3}\sqrt{6})$.
   Der Radius $[MQ]$ steht senkrecht auf der Tangentialebene, d. h. $\overrightarrow{MQ}$ ist Normalvektor der Ebene; man kann nachrechnen, dass $\overrightarrow{MQ}$ ein Vielfaches des Normalvektors der Ebene E_{ASD} ist.
   Stellen Sie nun mit dieser Information die Gleichung der Parallelebene zu E_{ASD} durch den Punkt Q auf, und zeigen Sie, dass der Punkt B darauf liegt.
   (c) Der Mittelpunkt M der Kugel hat von der Ebene ABS und der Ebene ASD den gleichen Abstand, liegt also auf einer winkelhalbierenden Ebene dieser beiden Ebenen. Stellen Sie die Gleichungen dieser winkelhalbierenden Ebenen auf.
   (d) Bei geeigneter Beleuchtung wirft das Dreieck ASD einen Schatten auf die x_1x_2-Grundebene, so dass das projizierte Dreieck ASD' bei D' rechtwinklig ist und D' auf der Geraden $p : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, liegt. Wie kann D' berechnet werden?
   (e) Die x_1x_3-Ebene schneidet die Ebene $E_{TDC} : x_3 = 2\sqrt{6}$ in der Geraden YZ. Berechnen Sie mit dieser Information eine Gleichung der Geraden YZ.
   (f) Das Viereck $ABYZ$ ist ein gleichschenkliges Trapez mit Flächeninhalt $8\sqrt{6}$.
   (Y und Z können als Schnittpunkte der Geraden CT und DT mit der Ebene $x_2 = 0$ berechnet werden. Da die parallelen Geraden YZ und AB beide in der x_1x_3-Ebene verlaufen, AB in Höhe $x_3 = 0$, YZ in Höhe $x_3 = 2\sqrt{6}$, ist der Geradenabstand $d(YZ, AB) = 2\sqrt{6}$ und somit die Fläche $A_{ABYZ} = \frac{\overline{AB}+\overline{YZ}}{2} \cdot d(YZ, AB)$).
   Die x_1x_3-Ebene zerlegt das Oktaeder in zwei Teile. Wie kann berechnet werden, wie viel % die Pyramide $ABYZT$ vom ganzen Oktaeder ausmacht?

12. Klasse Lösungen	12
Lagebeziehung Ebene – Ebene	**10**

1.

(a) E_1 und E_2 schneiden sich (Normalvektoren sind nicht Vielfache).
$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6 \quad | \cdot 4$
$4x_1 - x_2 + 8x_3 = 9 \quad |$
$12x_1 - 5x_2 = 33$
$x_1 = \lambda$
$12\lambda - 5x_2 = 33$, also $x_2 = 2{,}4\lambda - 6{,}6$
$2\lambda - (2{,}4\lambda - 6{,}6) - 2x_3 = 6$; $x_3 = 0{,}3 - 0{,}2\lambda$
Schnittgerade:
$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6{,}6 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$
Schnittwinkel: $\cos\varphi = \frac{|2\cdot 4 + (-1)\cdot(-1) + (-2)\cdot 8|}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{16+1+64}} = \frac{7}{27}$; $\varphi \approx 74{,}97°$.

(b) E_1 und E_2 sind echt parallel (denn $E_2 | \cdot (-2)$ ergibt $2x_1 - x_2 - 2x_3 = -12$).

HNF von E_1: $|\vec{n}_1| = \sqrt{4+1+4} = 3$, also $E_1 : \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - 2x_3 - 6) = 0$.
Punkt auf E_2: $P(0|0|6)$. Abstand: $d(E_1, E_2) = |\frac{1}{3}(0 - 0 - 2\cdot 6 - 6)| = 6$.

(c) E_1 und E_2 sind identisch (denn Mult. der E_2-Gleichung mit 4 ergibt E_1).

2.
F muss in Ri. der Geraden und in Ri. des Normalvektors der Ebene E verlaufen, also Normalvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, und F enthält den Geraden-Aufpunkt $A(1|1|-1)$.
Ansatz: $F : 7x_1 - x_2 + 3x_3 = d$, A einsetzen: $7 - 1 - 3 = d$, also $F : 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$.

3.

(a) E_{BCT}: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18\sqrt{2} \\ 6\sqrt{6} \\ -6\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$
Ansatz $18\sqrt{2}x_1 + 6\sqrt{6}x_2 - 6\sqrt{3}x_3 = d$, $B(-6|0|0)$ einsetzen: $d = -108\sqrt{2}$.
Division durch $6\sqrt{3}$ ergibt $E_{BCT} : \sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = -6\sqrt{6}$, also mit E_{ASC} paralleler Normalvektor.

(b) Ansatz für die Parallelebene: $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = d$, Einsetzen von Q liefert $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = -6\sqrt{6}$.

Einsetzen von B → wahre Aussage.

(c) HNF von E_{ASD}: $|\vec{n}| = \sqrt{6+2+1} = 3$, also $E_{ASD} : \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = 0$.
HNF von $E_{ABS} : x_3 = 0$.

Für Punkte P mit gleichem Abstand von E_{ABS} und E_{ASD} gilt $d(P, E_{ABS}) = d(P, E_{ASD})$, also (mit HNF): $|\frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3)| = |x_3|$.

Winkelhalbierende Ebenen also:
$E_{W1} : \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = +x_3$, d. h. $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - 4x_3 = 0$ und $E_{W2} : \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = -x_3$, d. h. $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2x_3 = 0$ (wobei $M \in E_{W2}$).

(d) D' wird als allgemeiner Geradenpunkt von p angesetzt: $D'(2-\lambda|\sqrt{3}\lambda|0)$.
$\overrightarrow{AD'} \perp \overrightarrow{SD'}$, also $\overrightarrow{AD'} \circ \overrightarrow{SD'} = 0$, also $(2-\lambda)\cdot(2-\lambda+3) + \sqrt{3}\lambda\cdot(\sqrt{3}\lambda - 3\sqrt{3}) + 0 = 0$, also $4\lambda^2 - 16\lambda + 10 = 0$.

(e) x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$. $E_{TDC} : x_3 = 2\sqrt{6}$.
Bei diesem unterbestimmten Gleichungssystem liegen x_2 und x_3 bereits fest. Frei wählbar ist also nur $x_1 = \lambda$.
Somit:
$$YZ : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(f) $V_{\text{Oktaeder}} = 2\cdot$Volumen der Pyramide $ABCDT = 2 \cdot \frac{1}{3}$Grundfläche $\cdot$ Höhe, wobei Grundfläche = Quadratfläche und Höhe = Abstand des Punktes T von der Ebene E_{ABD} (mit Hilfe der HNF).
Volumen der Pyramide $ABYZT =$
$= \frac{1}{3}$ Trapez-Grundfläche $\cdot$ Höhe, wobei die Höhe wieder als Abstand des Punktes T von der Trapez-Ebene $x_2 = 0$ gesehen werden kann.

Der prozentuale Anteil wird dann als Bruch $\frac{V_{\text{Pyr}}}{V_{\text{Oktaeder}}}$ berechnet.