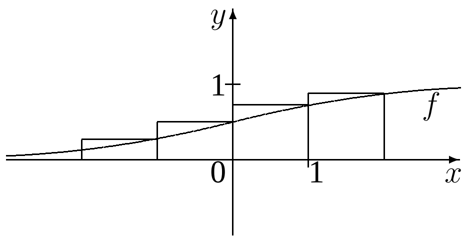
12. Klasse Übungsaufgaben	12
Integration	01

1. Gegeben ist $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ mit dem nebenstehenden Graphen.



   (a) Berechnen Sie für $A = \int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$ eine Abschätzung nach oben, indem Sie wie in der Abbildung die Streifenflächen berechnen und summieren.

   (b) Berechnen Sie den exakten Wert von A (beachten Sie: Der Zähler ist Ableitung des Nenners, also $f(x)$ von der Bauart $\frac{N'(x)}{N(x)}$).
   Um wie viel % weicht die Abschätzung aus Teilaufgabe (a) hiervon ab?

   (c) Die Verkaufszahlen eines bestimmten Autotyps (in 100 000 Stück) im Jahre x (Markteinführung vor zwei Jahren: $x = -2$) werden modellhaft durch die Funktion f beschrieben.
   Welche Bedeutung haben dann $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$ in diesem Kontext?

2. Skizzieren Sie die Graphen zu den Funktionen mit $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)x^2$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x^2-4)$ und berechnen Sie

   (a) den Inhalt A_1 der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird;

   (b) den Inhalt A_2 der Fläche zwischen den Graphen von f und g;

   (c) $A_3 = \int\limits_{1}^{2{,}5} f(x)dx$ und deuten Sie das Vorzeichen hiervon;

   (d) den Inhalt A_4 der Fläche, die von der Tangente an g im Punkt $(-3|2{,}5)$, der x-Achse und dem Graphen von g eingeschlossen wird;

   (e) b so, dass $\int\limits_{0}^{b} g(x)dx = 0$ und deuten Sie die Ergebnisse.

3. Berechnen Sie:

   (a) $$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x^3-x-5}{x^2}dx$$

   (b) $\int\limits_{0}^{4} (6\sqrt[3]{x}-5)dx$

   (c) $\int\limits_{0}^{1} x\cdot e^{x^2}dx$

12. Klasse Lösungen	**12**
Integration	**01**

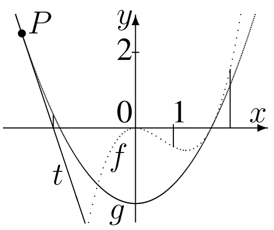
1.

(a) Da f streng monoton steigend ist, nimmt die Funktion jeweils am rechten Streifenrand ihren größten Wert an. Daher ist $A \leq$ „Summe Streifenbreite · Streifenhöhe“ $1\cdot f(-1)+1\cdot f(0)+1\cdot f(1)+1\cdot f(2)=$ $\frac{e^{-1}}{e^{-1}+1}+\frac{e^0}{e^0+1}+\frac{e^1}{e^1+1}+\frac{e^2}{e^2+1}\approx 2{,}38$.

(b) $A=\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx = [\ln(e^x+1)]_{-2}^2 =$ $\ln(e^2+1)-\ln(e^{-2}+1)=2$.
Die Abweichung 0,38 sind $\frac{0{,}38}{2}=$ $0{,}19=19\ \%$ hiervon.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = 1$ beschreibt einen Sättigungswert, dem sich die Verkaufszahlen auf lange Dauer nähern.
Das Integral A beschreibt einen Gesamtbestand, d. h. die Gesamtzahl der verkauften Autos im Zeitraum von vier Jahren (seit Markteinführung vor zwei Jahren bis in zwei Jahren) gemäß dieser Modellierung.

2.

(a) 

Wegen der Nullstellen $x=0$ und $x=2$ und wegen der Lage unterhalb der x-Achse ist
$A_1=-\int\limits_0^2 f(x)dx=-\int\limits_0^2(\frac12x^3-x^2)dx=$ $-\left[\frac12\cdot\frac14x^4-\frac13x^3\right]_0^2=-(2-\frac83)=\frac23$.

(b) Schnittstellen: $f(x)=g(x)$;
$(x-2)x^2=(x+2)(x-2)$; also $x_1=2$ oder $x^2=x+2$, d. h. $x^2-x-2=0$, d. h. $x_{2/3}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow 2}{\searrow -1}$
$A_2=\int\limits_{-1}^{2}(f(x)-g(x))dx=\frac12\int\limits_{-1}^{2}(x^3-$ $3x^2+4)dx=\frac12\left[\frac14x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}=$ $\frac12(4-8+8-(\frac14-(-1)-4))=\frac{27}{8}$.

(c) $A_3=\int\limits_1^{2{,}5}(\frac12x^3-x^2)dx=\left[\frac18x^4-\frac13x^3\right]_1^{2{,}5}$ $=\frac18\cdot2{,}5^4-\frac13\cdot2{,}5^3-(\frac18-\frac13)\approx-0{,}12<0$
Von den Flächenstücken, die zu diesem Integral beitragen, liegt mehr unterhalb als oberhalb der x-Achse.

(d) Berechnung der Tangente: $g'(x)=x$, $m=g'(-3)=-3$, Ansatz $y=-3x+t$, P einsetzen $2{,}5=-3\cdot(-3)+t$ liefert t, also Tangente $t(x)=-3x-6{,}5$.
Nullstelle der Tangente:
$-3x-6{,}5=0$, also $x=-\frac{13}{6}$.
Das Flächenstück wird durch die Gerade $x=-\frac{13}{6}$ zerlegt in zwei Teile:
$A_4=\int\limits_{-3}^{-\frac{13}{6}}(g(x)-t(x))dx+\int\limits_{-\frac{13}{6}}^{-2}g(x)dx$
$=\left[\frac16x^3+\frac32x^2+\frac92x\right]_{-3}^{-\frac{13}{6}}+\left[\frac16x^3-2x\right]_{-\frac{13}{6}}^{-2}$
$=\frac16\cdot(-\frac{13}{6})^3+\frac32\cdot(-\frac{13}{6})^2+\frac92\cdot(-\frac{13}{6})-(\frac16\cdot$ $(-3)^3+\frac32\cdot(-3)^2+\frac92\cdot(-3))+\frac16\cdot(-2)^3-$ $2\cdot(-2)-(\frac16\cdot(-\frac{13}{6})^3-2\cdot(-\frac{13}{6}))=\frac18$

(e) $\int\limits_0^b(\frac12x^2-2)dx=\left[\frac16x^3-2x\right]_0^b=\frac16b^3-$ $2b-0=0$, also $b(\frac16b^2-2)=0$, also $b_1=0$, $b_{2/3}=\pm\sqrt{12}$.
Bei $b=0$ schrumpft die Fläche auf eine Linie der Breite 0, also Fläche 0.
Bei $b=\pm\sqrt{12}$ haben die Flächenanteile ober- und unterhalb der x-Achse gleichen Inhalt.

3.

(a) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{x^3-x-5}{x^2}dx=\int\limits_{-2}^{-1}(x-\frac1x-5x^{-2})dx=$ $\left[\frac12x^2-\ln|x|+5x^{-1}\right]_{-2}^{-1}=\frac12-\ln1-$ $5-(2-\ln2-\frac52)\approx-3{,}31$

(b) $\int\limits_0^4(6x^{\frac13}-5)dx=\left[6\cdot\frac34x^{\frac43}-5x\right]_0^4=$ $\frac92\cdot4^{\frac43}-20-0\approx8{,}57$

(c) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{x^2}dx=\left[\frac12e^{x^2}\right]_0^1=\frac12(e-1)\approx0,86$