12. Klasse Übungsaufgaben — 12

Wendepunkte, Integralfunktionen — 02

Anwendungsaufgaben siehe ueb121.pdf, Aufgabe 1 (c), ueb117.pdf, Aufgabe 4, grund110.pdf (Optimierungsaufgabe) und ueb103.pdf, Aufgabe 2.

1. Zu betrachten ist die Integralfunktion $I(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos t\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

   Berechnen Sie den Term von $I(x)$.

   Zeigen Sie: $I(0) < 0$ (obwohl $\cos t \geq 0$ für $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$). Formulieren Sie eine Begründung für diese Beobachtung.

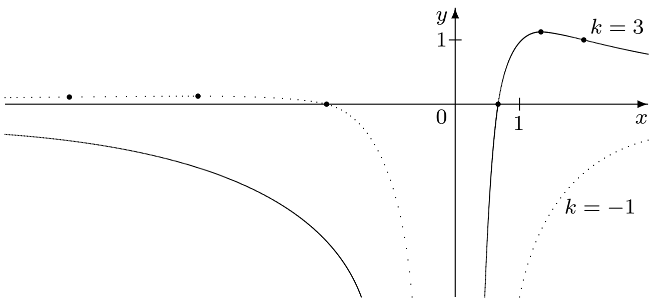
2. (a) Untersuchen Sie $f(x) = 2x^4 - x$ auf Extrema und Wendepunkte (x-Werte und Art genügen jeweils).

   (b) Untersuchen Sie $f(x) = -x^4 + 2x^3$ auf Extrema (x-Werte und Art genügen) und Wendepunkte. Zeigen Sie, dass bei $x = 1$ ein Wendepunkt vorliegt, und berechnen Sie die Wendetangente in diesem Punkt.

   (c) Untersuchen Sie $f(x) = x^4$ auf Extrema und Wendepunkte.

3. Bestimmen Sie für $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$ (siehe auch ueb116.pdf/Aufgabe 5) die Lage des Wendepunkts.

4. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = \dfrac{kx - 2}{x^2}$. Das Schaubild zeigt die Graphen für $k = 3$ und $k = -1$.

   Bestimmen Sie die Lage des Wendepunkts in Abhängigkeit vom Parameter k.

   Überzeugen Sie sich davon, dass sich für $k = 3$ die in der Abbildung gezeigte Lage des Wendepunktes ergibt.

5. Berechnen Sie den Term einer achsensymmetrischen Funktion 4. Grades, deren Wendepunkt bei $x = 1$ liegt, wobei der Wendepunkt zugleich Nullstelle ist und darin die Steigung 2 hat.

6. Zeigen Sie: $I(x) = x \cdot \ln \frac{x+3}{2x} + 3\ln(x+3) - 7\ln 2$ ist der Term der Integralfunktion $I(x) = \int\limits_{1}^{x} \ln \frac{t+3}{2t} dt$.

   Der Integrand $f(t) = \ln \frac{t+3}{2t}$ hat die Nullstelle $x = 3$. Was folgt daraus für den Graphen von I?

12. Klasse Lösungen	12
Wendepunkte, Integralfunktionen	**02**

1.
$I(x) = [\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{x} = \sin x - \sin\frac{\pi}{2} = \sin x - 1$
$I(0) = \sin 0 - 1 = -1 < 0$
Die Fläche liegt zwar oberhalb der x-Achse, aber „rückwärts“ integrieren (von $\frac{\pi}{2}$ bis 0) ändert das Vorzeichen.

2.
(a) $f'(x) = 8x^3 - 1$; $f''(x) = 24x^2$

Extrema: $f'(x) = 0$: $x^3 = \frac{1}{8}$; $x = \frac{1}{2}$.
$f''(\frac{1}{2}) = 6 \Rightarrow$ Min

Wendepunkte: $f''(x) = 0$: $x = 0$.

$f'' > 0$ 0 $f'' > 0$

Also Flachpunkt bei $x = 0$.

(b) $f'(x) = -4x^3 + 6x^2$
$f''(x) = -12x^2 + 12x$

Extrema: $f'(x) = 0$:
$-2x^2(2x - 3) = 0$; $x_{1/2} = 0$; $x_3 = \frac{3}{2}$.

$f' > 0$ $f' > 0$ $f' < 0$
steigt 0 steigt $\frac{3}{2}$ fällt

Also Terrassenpunkt bei $x = 0$, Maximum bei $x = \frac{3}{2}$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$:
$-12x(x - 1) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

$f'' < 0$ 0 $f'' > 0$ 1 $f'' < 0$

Also Wendepunkte bei $x = 0$ und $x = 1$. Die y-Werte erhält man durch Einsetzen in $f(x)$: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

Wendetangente im Punkt $(1|1)$:
$m = f'(1) = 2$. Ansatz: $y = 2x + t$.

Punkt einsetzen: $1 = 2 \cdot 1 + t \Rightarrow t$.
Also Wendetangente: $y = 2x - 1$.

(c) $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$.

Extrema: $f'(x) = 0$: $x = 0$.

$f' < 0$ $f' > 0$
fällt 0 steigt

Also Min$(0|0)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$: $x = 0$.

$f'' > 0$ 0 $f'' > 0$

Also Flachpunkt $(0|0)$

3.
$f'(x) = -x^{-2} - 2x$, $f''(x) = 2x^{-3} - 2 = \frac{2}{x^3} - 2$
$f''(x) = 0$: $x^3 = 1$; $x = 1$

$f'' < 0$ $f'' > 0$ $f'' > 0$
re.- 0 li.- 1 rechtsgekrümmt
$\notin D$ WP $(1|0)$

4.
$f_k'(x) = \frac{x^2\cdot k-(kx-2)\cdot 2x}{x^4} = \frac{kx-2(kx-2)}{x^3} = \frac{4-kx}{x^3}$
$f_k''(x) = \frac{x^3\cdot(-k)-(4-kx)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2kx-12}{x^4}$.
$f_k''(x) = 0$: $2kx - 12 = 0$; $x = \frac{6}{k}$
Falls $k = 0$: Kein Wendepunkt.
Falls $k > 0$:
re.- $0 \notin D$ re.- $\frac{6}{k}$ linksgekr.
Falls $k < 0$:
li.- $\frac{6}{k}$ re.- $0 \notin D$ rechtsgekr.
WP$(\frac{6}{k}|\frac{k^2}{9})$, für $k = 3$ also $(2|1)$, stimmt.

5.
Ansatz wegen Achsensymmetrie mit geraden Funktionen: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$;
$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$; $f''(x) = 12ax^2 + 2b$
WP bei $x=1$: $f''(1)=0$: $12a + 2b = 0$ A
Nullstelle bei $x=1$: $f(1)=0$: $a+b+c=0$ B
Steigung bei $x=1$: $f'(1)=2$: $4a + 2b = 2$ C
Aus A und C folgt $8a = -2$, also $a = -\frac{1}{4}$.
Mit A folgt $b = \frac{3}{2}$, mit B dann $c = -\frac{5}{4}$.
Also: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}$.
Mittels Vorzeichenbetrachtung von f'' bestätigt man, dass bei $x = 1$ tatsächlich ein WP vorliegt (und nicht nur ein Flachpunkt).

6.
Falls $I(x) = x\cdot(\ln(x+3)-\ln(2x))+3\ln(x+3) - 7\ln 2$ Integralfunktion, so muss deren Ableitung den Integranden ergeben:
$I'(x) = 1\cdot\ln\frac{x+3}{2x}+x\cdot(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{2x}\cdot 2)+3\cdot\frac{1}{x+3} = \ln\frac{x+3}{2x} + x\cdot\frac{x-(x+3)}{(x+3)\cdot x} + \frac{3}{x+3} = f(x)$.
Mit Hilfe dieser Stammfunktion kann nun integriert werden:
$\int\limits_1^x \ln\frac{x+3}{2x}dx = [I(t)]_1^x = I(x) - I(1) = I(x) - (1\cdot\ln\frac{1+3}{2\cdot 1} + 3\ln(1+3) - 7\ln 2) = I(x) - (\ln 2 + 3\ln 4 - 7\ln 2) = I(x)$, denn $\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2$.
Aus $f(3) = I'(3) = 0$ folgt, dass I bei $x = 3$ eine waagrechte Tangente hat.