12. Klasse Übungsaufgaben — 12

Erwartungswert, Binomialverteilung — 03

1. Erklären Sie anschaulich die Bedeutung von $\binom{n}{k}$ in der $B(n;p;k)$-Formel.
2. Beim Lotto 6 aus 49 befinden sich 49 Kugeln in der Lostrommel, aus denen 6 ohne Zurücklegen gezogen werden.
   (a) Der Spielteilnehmer hat vor der Ziehung 6 Zahlen auf dem Spielschein angekreuzt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit (W.), dass sich unter den 6 gezogenen Kugeln genau 4 vorher angekreuzte befinden.
   (b) Wie viele Möglichkeiten für die Ziehung 6 aus 49 gäbe es, wenn die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, von Interesse wäre?
3. Eine Maschine soll Papier auf eine bestimmte Länge zuschneiden. Das Schneidewerkzeug liefert nur zu 80 % korrekt geschnittene Blätter. Das Experiment soll als Bernoulli-Kette betrachtet werden.
   (a) Erscheint Ihnen die hierfür nötige Unabhängigkeitsannahme gerechtfertigt?
   (b) Geben Sie die W. an, dass sich unter 100 Blättern • mindestens 98 • höchstens 90 • mindestens 90 • mindestens 70 und höchstens 90 einwandfreie befinden.
   (c) Das Schneidewerkzeug wird ausgetauscht, wenn unter 50 Blättern weniger als $k_0 = 45$ einwandfreie sich befinden. Wie groß ist die W. für einen Austausch?
   Wie muss die Zahl k_0 geändert werden, damit die Austausch-Wahrscheinlichkeit mindestens 99 % beträgt?
   (d) Beim Zuschnitt entsteht — auf ganze mm gerundet — zu 3 % die Papierlänge 295 mm, zu 18 % die Länge 296 mm, zu 45 % 297 mm, zu 22 % 298 mm, zu 7 % 299 mm und zu 5 % 300 mm. Berechnen Sie Erwartungswert und Streuung.
4. In einer Klasse mit 25 Jugendlichen (davon 11 Mädchen) geben je 4 Buben und Mädchen an, für das Studium bereits Geld zu sparen.
   (a) Es wird eine Person zufällig ausgewählt. Mit welcher W. handelt es sich um ein Mädchen, wenn die ausgewählte Person zur Gruppe der „Sparer“ gehört?
   (b) Nun werden nacheinander 4 Schüler zufällig ausgewählt. Zu betrachten ist das Ereignis „Es wird genau ein Sparer ausgewählt“. Zeigen Sie, dass sich die W. für Ziehen ohne bzw. mit Zurücklegen um mehr als 2 Prozentpunkte unterscheiden.
   Warum ist der Unterschied bei Ziehen aus einer großen Personenzahl geringer?

   Im Folgenden soll im Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ gerechnet werden.

   (c) Wie groß ist die W., dass • frühestens die vierte gezogene Person weiblich ist,
   • spätestens die vierte gezogene Person weiblich ist,
   • die vierte gezogene Person die zweite weibliche ist?
   (d) Berechnen Sie, wie oft das Experiment „Auswahl einer Person“ durchgeführt werden muss, um mit mehr als 99 % W. mind. einen männl. Sparer zu ziehen.
   (e) Nun wird aus 200 Personen mit gleichen prozentualen Anteilen wie in der Schulklasse gezogen. Wie groß ist die Zahl μ der zu erwartenden männlichen Nichtsparer? Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau diese Anzahl? Wie groß ist die Streuung σ für diese Anzahl? Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich die Zahl der gezogenen männlichen Nichtsparer im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$?

# 12. Klasse Lösungen	12
Erwartungswert, Binomialverteilung	**03**

1. Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$: „Wann unter den n Versuchen kommen die k Treffer“.
2. (a) $P(\text{„4 Treffer“}) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15\cdot 903}{13\,983\,816} \approx 0{,}00097 = 0{,}097\,\%$
   (b) 49 Möglichkeiten für die erste Kugel, dann 48 für die zweite usw., also $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = \frac{49!}{43!} = 10\,068\,347\,520$
3. (a) Die Annahme ist zu hinterfragen, da z. B. einem im vorhergehenden Schritt zu kurz geschnittenes Blatt ein längeres nachfolgen könnte.
   (b)
   - $P_{n=100,p=0{,}8}(k \geq 98) = B(100; 0{,}8; 98) + B(100; 0{,}8; 99) + B(100; 0{,}8; 100)$
     $= \binom{100}{98}0{,}8^{98}0{,}2^2 + \binom{100}{99}0{,}8^{99}0{,}2 + \binom{100}{100}0{,}8^{100}$
     $= \frac{100\cdot 99}{2} \cdot 0{,}8^{98}0{,}2^2 + 100 \cdot 0{,}8^{99}0{,}2 + 1 \cdot 0{,}8^{100} = 6{,}8 \cdot 10^{-8}$
   - $P_{n=100,p=0{,}8}(k \leq 90) = 0{,}99767$
   - $P_{n=100,p=0{,}8}(k \geq 90) = 1 - P_{n=100,p=0{,}8}(k \leq 89) = 1 - 0{,}99430 = 0{,}00570$
   - $P_{n=100,p=0{,}8}(70 \leq k \leq 90) = P_{n=100,p=0{,}8}(k \leq 90) - P_{n=100,p=0{,}8}(k \leq 69) = 0{,}99767 - 0{,}00606 = 0{,}99161$

   (c) $P_{n=50,p=0{,}8}(k < 45) = P_{n=50,p=0{,}8}(k \leq 44) = 0{,}95197$
   Für die zweite Frage soll gelten: $P_{n=50,p=0{,}8}(k < k_0) = P_{n=50,p=0{,}8}(k \leq k_0 - 1) \geq 0{,}99$. Gemäß Tafel ist dies für $k_0 - 1 \geq 46$ der Fall, also $k_0 = 47$.
   (d) $\mu = 295\cdot 0{,}03 + 296\cdot 0{,}18 + 297\cdot 0{,}45 + 298\cdot 0{,}22 + 299\cdot 0{,}07 + 300\cdot 0{,}05 = 297{,}27$
   $V(X) = (295 - \mu)^2 \cdot 0{,}03 + (296 - \mu)^2 \cdot 0{,}18 + \ldots = 1{,}1771$, also $\sigma = 1{,}0849$
4. (a) M: Mädchen, S: Sparer. $P_S(M) = \frac{P(M\cap S)}{P(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
   (b) Ohne Zurücklegen: $P(E) = \frac{\binom{8}{1}\binom{17}{3}}{\binom{25}{4}} = 0{,}43004$
   Mit Zurücklegen: $B(4; \frac{8}{25}; 1) = \binom{4}{1}0{,}32 \cdot 0{,}68^3 = 0{,}40247$
   Differenz also größer als $0{,}02$.
   Bei Ziehen ohne Zurücklegen aus einer größeren Personenzahl verändert das Ziehen eines Treffers die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Zug wieder einen Treffer zu ziehen, kaum, so dass dann Ziehen ohne Zurücklegen wie Ziehen mit Zurücklegen gerechnet werden kann.
   (c)
   - Das heißt, unter den ersten drei kein weiblicher Treffer:
     $P_{n=3,p=0{,}44}(k = 0) = 0{,}56^3 = 0{,}17562$
   - Das heißt, mindestens ein Treffer unter den ersten vier:
     $P_{n=4,p=0{,}44}(k \geq 1) = 1 - P_{n=4,p=0{,}44}(k = 0) = 1 - 0{,}56^4 = 0{,}90166$
   - Das heißt, unter den ersten drei ein Treffer, dann wieder ein Treffer:
     $B(3; 0{,}44; 1) \cdot 0{,}44 = \binom{3}{1}0{,}44 \cdot 0{,}56^2 \cdot 0{,}44 = 0{,}18214$

   (d) Soll gelten: $P_{n=?,p=\frac{4}{25}}(k \geq 1) > 0{,}99$, also $1 - P_{n=?,p=0{,}16}(k = 0) < 0{,}01$.
   $0{,}84^n < 0{,}01$; $n \ln 0{,}84 < \ln 0{,}01$.
   Da $\ln 0{,}84$ negativ ist, ändert sich beim Dividieren das Ungleichungszeichen: $n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}84} \approx 26{,}4$, also mindestens 27.
   (e) $\mu = np = 200 \cdot \frac{10}{25} = 200 \cdot 0{,}4 = 80$. $\quad B(200; 0{,}4; 80) = 0{,}05751$.
   $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = 6{,}9282$.
   $P_{n=200,p=0{,}4}(\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma) = P_{n=200,p=0{,}4}(74 \leq k \leq 86) =$
   $P_{n=200,p=0{,}4}(k \leq 86) - P_{n=200,p=0{,}4}(k \leq 73) = 0{,}82607 - 0{,}17423 = 0{,}65184$