12. Klasse Übungsaufgaben — 12

Testen von Hypothesen — 04

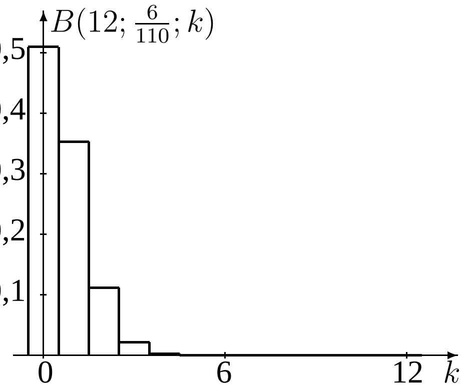
1. Eine politische Partei möchte bei der nächsten Wahl die 5 %-Hürde überspringen. Wie sollte (auf 1 %-Signifikanzniveau) aufgrund einer Umfrage unter 200 Wahlberechtigten entschieden werden, ob noch Wahlkampf hierfür betrieben werden soll?

2. In einem Kinderspiel wird aus den Ziffern „123456“ jeweils die gewürfelte Ziffer ausgestrichen. Nikola vermutet, da nach 1000 solchen Spielen nur bei wenigen bereits nach dem sechsten Wurf alle Ziffern gestrichen waren, der verwendete Würfel biete nur eine geringe Chance für ein Sechs-Wurf-Spiel. Erstellen Sie einen entsprechenden Test auf 5 %-Niveau für Nikolas Vermutung ($= H_1$/ H_0: Laplace-Würfel).

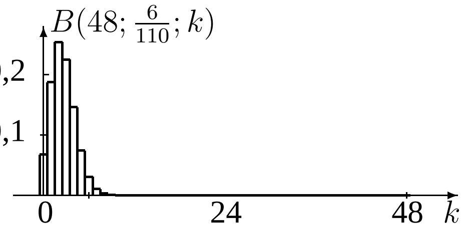
k	$\sum_{i=0}^{k} B(1000; \frac{120}{7776}; i)$
	...
7	0,0135
8	0,0289
9	0,0557
	...
21	0,9344
22	0,9588
	...

3. Ein Hersteller, der in eine große Ladung Natursteinplatten unterschiedliche Anteile 1. Wahl und 2. Wahl mischt, möchte die Verärgerung anspruchsvoller Kunden, die mehr als 70 % 1. Wahl erwarten, vermeiden und führt mit einer Stichprobe von 50 Stück einen entsprechenden Hypothesentest durch.
   (a) Begründen Sie Ihre Wahl von Nullhypothese und Alternative.
   (b) Stellen Sie die Entscheidungsregel (ER) für einen Test auf Niveau 5 % auf.
   (c) Wie ist bei dieser ER zu entscheiden, wenn 20 % der Stichprobe 2. Wahl waren?
   (d) Wie groß ist bei dieser ER das Risiko des Herstellers, eine Lieferung irrtümlich nicht für gut zu halten, obwohl tatsächlich 85 % der Steine 1. Wahl sind?

4. In einer Gewinnshow behauptet ein Kandidat, anhand des unterschiedlichen Abnutzungsgrads der Spielkarten aus einem Rommé-Blatt (110 Karten, davon 6 Joker) mit 50 % Treffsicherheit blind eine Karte auszuwählen, bei der es sich um einen Joker handelt. Er hat mit einem jeweils neuen Kartenstapel 12 Versuche, von denen er mindestens 2mal ein Joker herausziehen muss.



   (a) Berechnen Sie gemäß dem Grundsatz „in dubio pro reo“ mit Hilfe des hier abgebildeten Histogramms der $B(n; p)$-Verteilung bzw. mit entsprechenden Formeln α- und β-Fehler.
   (b) Wie müsste die Entscheidungsregel für einen Test auf 10 %-Niveau für $n = 48$ Versuche gewählt werden?



   (c) Warum ist im Histogramm zu $n = 48$ der Berg schmäler als im ersten?
   (d) Welche Möglichkeit ergibt sich daraus, gleichzeitig α- und β-Fehler zu verkleinern?

12. Klasse Lösungen — 12
Testen von Hypothesen — 04

1.
Treffer: Befragte Person ist Wähler der Partei, Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt.
H_0: $p \leq 0{,}05$, H_1: $p > 0{,}05$
ER: H_0 ablehnen, falls Trefferzahl $k \geq k_0$.
α-Fehler: H_0 abgelehnt, obwohl wahr, d. h. zu glauben, die Partei überspringt die 5 %-Hürde, obwohl sie nicht den dafür notwendigen Wähleranteil hat (= schwerer Fehler):
$\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) = P_{\substack{n=200\\p=0{,}05}}(k \geq k_0) \leq 0{,}01$, d. h. $P_{\substack{n=200\\p=0{,}05}}(k \leq \underbrace{k_0 - 1}_{18 \text{ (Tafel)}}) \geq 0{,}99$,
also $k_0 = 19$.
ER also: H_0 ablehnen, d. h. kein Wahlkampf, falls mind. 19 Wähler in der Stichprobe.

2.
Treffer: Spiel mit sechs Würfen; hierfür: 6 Mögl. beim ersten Wurf, dann 5 beim zweiten usw., beim Laplace-Würfel also Trefferw. $p = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6} = \frac{120}{7776}$, sonst p unbekannt.
H_0: $p \geq \frac{120}{7776}$, H_1: $p < \frac{120}{7776}$
ER: H_0 ablehnen, falls Trefferzahl $k \leq k_0$.
$\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) = P_{\substack{n=1000\\p=120/7776}}(k \leq k_0) \leq 0{,}05$, Tabelle $\rightarrow k_0 = 8$.
ER also: H_0 ablehnen, d. h. den Würfel signifikant ablehnen, bei ≤ 8 Treffern.

3.
(a) Treffer: Steinplatte ist 1. Wahl, Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt.
H_0: $p \leq 0{,}70$, H_1: $p > 0{,}70$
α-Fehler: H_0 abgelehnt, obwohl wahr, d. h. zu glauben, die Steinplattenmenge sei hochwertig, obwohl sie nicht den nötigen Anteil hat $\rightarrow$ Verärgerung des Kunden, schwerer Fehler.

(b) ER: H_0 ablehnen, falls $k \geq k_0$.
$\alpha = P_{n=50,p=0{,}70}(k \geq k_0) \leq 0{,}05$,
d. h. $P_{\substack{n=50\\p=0{,}70}}(k \leq \underbrace{k_0 - 1}_{40 \text{ (Tafel)}}) \geq 0{,}95$,
also $k_0 = 41$.
ER also: H_0 ablehnen, d. h. Steinplattenmenge für gut halten, falls mind. 41 Platten 1. Wahl in der Stichprobe.

(c) Bei 20 % von 50 = 10 Steinen 2. Wahl, d. h. 40 Steine 1. Wahl, genügt dies also nicht, um die Lieferung für signifikant gut zu halten (weitere Tests nötig).

(d) $\beta = P_{n=50 p=0{,}85}(k \leq 40) \overset{\text{(Tafel)}}{=} 0{,}20891$

4.
(a) Treffer: Kandidat zieht Joker, Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt.
α-Fehler: Den Kandidaten aufgrund der Trefferzahl k für unbegabt halten, obwohl der in Wirklichkeit gut ist. Daher:
H_0: $p = 0{,}5$, H_1: $p = \frac{6}{110}$.
ER: H_0 ablehnen, falls $k \leq 1$.
$\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) = P_{n=12,p=6/110}(k \leq 1) \approx 0{,}51 + 0{,}35 = 0{,}86$ (Histogramm erste zwei Balken).
$\beta = P_{H_1}(H_0 \text{ nicht abgelehnt}) = P_{\substack{n=12\\p=0{,}50}}(k \geq 2) = 1 - P_{\substack{n=12\\p=0{,}50}}(k \leq 1) = 1 - (0{,}5^{12} + \binom{12}{1} 0{,}5^1 0{,}5^{11}) = 0{,}9968$

(b) ER jetzt: H_0 ablehnen, falls $k \leq k_0$.
$\alpha = P_{n=48,p=6/110}(k \leq k_0) \leq 0{,}10$, im Histogramm werden von 0 bis k_0 so viele Balken genommen, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten unter 0,10 bleibt, also nur der erste, also $k_0 = 0$. Bereits bei einem erkannten Joker kann die Hypothese eines „Zufallstreffers“ nicht angenommen werden.
Dies beweist zwar noch nicht die Begabung des Kandidaten, der Kandidat wird sozusagen „mangels Beweisen“ („in dubio pro reo“) freigelassen.

(c) Aufgrund der unterschiedlichen Skalierung der k-Achse müsste die zweite Graphik eigentlich 4-mal so breit gezeichnet werden; jedoch ist die Streuung $\sqrt{npq}$ nur $\sqrt{4} = 2$-fach, so dass sich im Histogramm ein schmälerer Berg ergibt.

(d) Durch Erhöhung des Stichprobenumfangs können beide Fehler verkleinert werden.