

<b>12. Klasse Übungsaufgaben</b>	<b>12</b>
<b>Geradengleichungen</b>	<b>05</b>

1. Gegeben ist die Gerade  $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Prüfen Sie, ob die folgenden Punkte auf  $g$  liegen:

$Q(1|4|3), R(0|2|1), S(5|0|2).$

Berechnen Sie die Koordinaten eines Punktes  $T$  auf  $g$  mit  $T(\cdot|\cdot|0).$

2. Zeigen Sie, dass die Punkte  $A(-2|-2|8), B(4|4|4), C(2|2|\frac{16}{3})$  und  $D(-17|-17|18)$  auf einer Geraden liegen, indem Sie die Gleichung der Geraden  $AB$  aufstellen und zeigen, dass  $C$  und  $D$  auf  $AB$  liegen.

3. Berechnen Sie den Abstand des Punktes  $D(2,5|-0,5|1)$  von der Geraden  $AB$  durch  $A(-1|-1|1)$  und  $B(2|-2|1)$  und berechnen Sie damit die Fläche des Dreiecks  $ABD$ . Vergleichen Sie mit dem Vektorprodukt-Ergebnis (vgl. grund119.pdf).

4. Welche besondere Lage haben folgende Geraden im Koordinatensystem:

(a)  $g : \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$

(b)  $h : \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$

5. Gegeben ist die Schar der Punkte  $P_a(a|14|12 - 3a)$  mit dem reellen Parameter  $a$ .

(a) Geben Sie in Punkt-Richtungsform die Gleichung der Geraden  $g$  an, auf der alle Punkte  $P_a$  liegen.

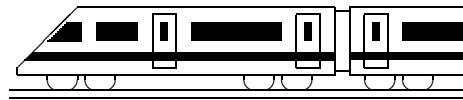
(b) Welche Lage haben die Punkte  $P_{0,5}, P_0$  und  $P_1$  zueinander?

Welche Lage haben die Punkte  $P_{-1}, P_0$  und  $P_1$  zueinander?

6. (a) Gegeben ist die Gerade  $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \tau \in \mathbb{R}.$

Wie lautet die Gleichung der Geraden  $p$ , die durch senkrechte Projektion von  $g$  in die  $x_1x_2$ -Grundebene entsteht?

(b) Nun werde im zweidimensionalen Raum die Gerade  $y = -\frac{1}{2}x + 2,5$  betrachtet. Wie könnte diese Gerade in Punkt-Richtungsform beschrieben werden?



<b>12. Klasse Lösungen</b>	<b>12</b>
<b>Geradengleichungen</b>	<b>05</b>

1.

 $Q$  liegt nicht auf  $g$ , denn:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = -1$$

✓  
✗

 $R(0|2|1)$  liegt auf  $g$ , denn:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = -2$$

Probe: passt!  
Probe: passt!

 $S$  liegt nicht auf  $g$ , denn:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 3$$

✗

Für die  $x_3$ -Koordinate von  $T$  gilt:  $0 = -1 - \lambda$ , also  $\lambda = -1$ , also  $T(1|4|0)$ .

2.

$$AB : \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

 $C$  liegt auf  $g$ : Wähle  $\lambda = \frac{2}{3}$ . $D$  liegt auf  $g$ : Wähle  $\lambda = -2,5$ .

3.

$$AB : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ansatz:  $F(-1 + 3\lambda | -1 - \lambda | 1)$ .

$$DF \perp g, \text{ also } \begin{pmatrix} -1 + 3\lambda - 2,5 \\ -1 - \lambda + 0,5 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$(-3,5 + 3\lambda) \cdot 3 + (-0,5 - \lambda) \cdot (-1) + 0 = 0.$$

$$-10 + 10\lambda = 0. \lambda = 1. \text{ Also } F(2 | -2 | 1).$$

$$\text{Abstand } d(D, AB) = |\overrightarrow{DF}| =$$

$$= \sqrt{(2 - 2,5)^2 + (-2 + 0,5)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{2,5}.$$

Dreiecksfläche  $A_{ABD}$ :  $[DF]$  ist die Höhe im Dreieck  $ABD$  auf der Grundlinie  $[AB]$ , also

$$A_{ABD} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{DF} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2,5} = \frac{5}{2}.$$

Gleiches Ergebnis bei Berechnung mit dem Vektorprodukt:  $A_{ABD} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{5}{2}$  (vgl. ueb119.pdf, Aufgabe 2(c)).

4.

(a) Aufpunkt  $(0|0|0)$ , also ist  $g$  eine Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems.(b)  $x_2$ -Komponente konstant 5, also ist  $h$  parallel zur  $x_1x_3$ -Ebene.

5.

(a) Die Punktkoordinaten können direkt in eine Geradengleichung übertragen werden („allgemeiner Geradenpunkt rückwärts“):

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 12 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(b) Die drei Punkte haben jeweils gleichen Abstand voneinander.

Mögliche Formulierungen:

 $P_{0,5}$  ist Mittelpunkt von  $P_0$  und  $P_1$ . $P_{-1}$  ist der Spiegelpunkt von  $P_1$  bei Spiegelung am Punkt  $P_0$ .

6.

(a) Die  $x_3$ -Koordinate wird 0:

$$p : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

(b)  $y$ -Achsenabschnitt  $(0|2,5)$  als Aufpunkt. Wegen Steigung  $-\frac{1}{2}$  Richtungsvektor „2 nach rechts, 1 nach unten“, also

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dies ist übrigens die in die  $x_1x_2$ - bzw.  $xy$ -Grundebene eingebettete Gerade aus Teilaufgabe (a), denn der Punkt  $(0|2,5|0)$  liegt auf  $p$ , wie man mit  $\tau = -1,5$  sieht.