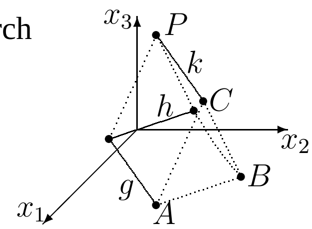
12. Klasse Übungsaufgaben	12
Ebenengleichungen	**06**

1. Das nebenstehende am Hang stehende Zelt ist gegeben durch $A(8|5|0)$, $B(5|8|0)$, $C(7|7|5)$, $P(2|2|6)$ sowie die Geraden

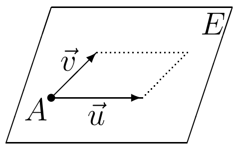


$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}, \text{ und } k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Stellen Sie Ebenengleichungen in Parameterform auf:
   (a) Ebene E_1, die durch die Punkte A, B, C gegeben ist.
   (b) Ebene E_2, die durch die Gerade k und den Punkt B festgelegt ist.
   Überzeugen Sie sich zuvor davon, dass der Punkt B nicht auf der Geraden k liegt.
   (c) Ebene E_3, die durch die beiden echt parallelen Geraden g und k festgelegt ist.
   (d) Ebene E_4, die durch die sich schneidenden Geraden g und h festgelegt ist.

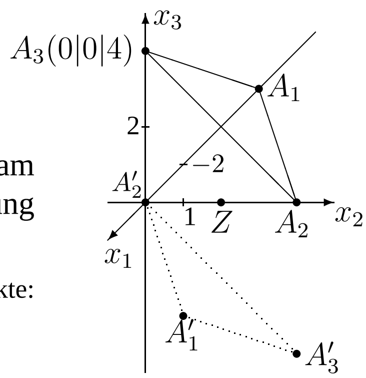
2. Gegeben sind der Punkt $A(2|-3|1)$ und die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Warum ist $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, keine Ebene?
   (b) Betrachten Sie nun die Ebene E mit Aufpunkt A und Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$.
   Wenn man für die Parameter nur Zahlen aus dem Intervall $[0; 1]$ zulässt, also $\lambda, \mu \in [0; 1]$, so erreicht man nur Punkte im nebenstehend dargestellten, von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramm.



   Zeigen Sie durch Einsetzen in die Parameterform, dass $P(1|-4|3)$ zwar auf der Ebene, aber nicht im eben genannten Parallelogramm liegt.

3. Gegeben sind die Punkte $A(3|0|3)$, $B(6|16|5)$, $C(0|4|5)$ und $D(4|-3|2)$.
   Warum kann man mit dem sog. Spatprodukt (→ grund119.pdf) $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD}$ prüfen, ob die Punkte A, B, C, D in einer Ebene liegen?
   Was bedeutet dies im Fall der hier gegebenen Punkte für die lineare (Un-?)Abhängigkeit der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$?

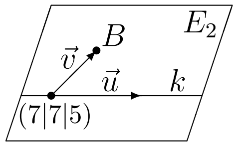
4. Gegeben ist die hier dargestellte Ebene E.
   (a) Geben Sie eine Gleichung von E an.
   (b) Spiegeln Sie die Punkte $A_1(-6|0|0)$, A_2, A_3 am Punkt $Z(0|2|0)$ und stellen Sie damit die Gleichung der gespiegelten Ebene E' auf.
   Tipp: Mögliche Vorgehensweise zum Spiegeln der Punkte: $\overrightarrow{ZA_1'} = \overrightarrow{A_1Z}$ mit „Spitze minus Fuß“ nach $\vec{A_1'}$ auflösen.



12. Klasse Lösungen	12
Ebenengleichungen	**06**

1. (a) $E_1 : \vec{X} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A}) + \mu(\vec{C} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (Möglich sind auch Lösungen z. B. mit $\vec{X} = \vec{B} + \lambda(\vec{A} - \vec{B}) + \mu(\vec{C} - \vec{B})$).

   (b) B in k: $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert $5 = 7 - 5\sigma$, also $\sigma = 0{,}4$, Probe in zweite Gleichung $8 = 7 - 5\sigma$ Widerspruch, also B nicht auf k.



$E_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   (c) $E_3 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   (d) $E_4 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. (a) Da der erste Richtungsvektor das 4-fache des zweiten Richtungsvektors ist, zeigen diese beiden in die gleiche Richtung, sind also linear abhängig, so dass keine Ebenengleichung entsteht.

   (b) P in E: $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Erste und dritte Zeile liefern $1 = 2 + 4\lambda + \mu$ und $3 = 1 + \lambda$, also $\lambda = 2$ und $\mu = -9$. Probe in zweite Zeile $-4 = -3 + 4\lambda + \mu$ stimmt. Also liegt P auf E, wegen $\lambda \notin [0; 1]$ aber nicht im Parallelogramm.

3. $\frac{1}{6}$ des Spatprodukts gibt das Volumen der Pyramide mit den Eckpunkten A, B, C, D an. Ist das Volumen 0, so liegen A, B, C, D in einer Ebene. Spatprodukt hier:
$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ 60 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 24 + 36 - 60 = 0.$$
Also liegen die Vektoren in einer Ebene und sind somit linear abhängig.

4. (a) Mit den Punkten A_1, $A_2(0|4|0)$, A_3 stellt man die Gleichung der Ebene auf:
$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   (b) $\overrightarrow{ZA_i'} = \overrightarrow{A_iZ}$, also $\vec{A}_i' - \vec{Z} = \vec{Z} - \vec{A}_i$, also $\vec{A}_i' = 2\vec{Z} - \vec{A}_i$ liefert $A_1'(6|4|0)$, $A_2'(0|0|0)$, $A_3'(0|4|-4)$.
Mit diesen Punkten stellt man die Gleichung von E' auf:
$E' : \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.