12. Klasse Übungsaufgaben — 12
Normalenform und HNF von Ebenen — 07

1. Bestimmen Sie jeweils eine Normalform der folgenden Ebenen

   (a) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

   (b) $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

   (c) $E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

   (d) Welche besondere Lage liegt jeweils vor?

   (e) Alternativ zum Vektorprodukt ist auch eine Umwandlung von der Parameter- in die parameterfreie Normalform möglich durch Eliminieren der Parameter.
   Beispiel mit der Ebene E aus grund127.pdf:

$$\begin{array}{rcll}
x_1 &=& 1+\lambda+2\mu & |\cdot(-4) \quad |\cdot(-3) \\
x_2 &=& 2+4\lambda+3\mu & | \\
\underline{x_3} &\underline{=}& \underline{1+3\lambda+5\mu} & \underline{\qquad\qquad |} \\
-4x_1+x_2 &=& -2 \quad -5\mu & | \\
\underline{-3x_1+x_3} &\underline{=}& \underline{-2 \quad -\mu} & \underline{|\cdot(-5)} \\
E: 11x_1+x_2-5x_3 &=& 8 &
\end{array}$$

   Relativ schnell geht dies bei den Ebenen aus den Teilaufgaben (b) und (c); führen Sie dies aus!

   (f) Lohnend ist die Methode aus Teilaufgabe (e) auch bei der Umwandlung von Geraden im $\mathbb{R}^2$. Bringen Sie auf diese Weise die Gerade $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, auf die Form $x_2 = mx_1 + t$.

2. Stellen Sie die Lotgerade auf die Ebene $E : 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 24$ durch den Punkt $P(1|1|-1)$ auf. Zeigen Sie, dass P nicht auf E liegt.

3. Schreiben Sie die Ebene $E : \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right) = 0$ in der Form $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ und zeigen Sie dann, dass $P(1|-4|6)$ auf E liegt.

4. Gegeben sind die Ebenen $E : 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 14$ und $F : -x_1 + 4x_2 + x_3 = -12$.

   (a) Berechnen Sie jeweils die Hesse-Normalform (HNF)!

   (b) Liegt der Punkt $P(4|2|-6)$ näher an E oder an F?

   (c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte $(0|0|x_3)$ auf der x_3-Achse, die Abstand 10 von der Ebene E haben.

   (d) Welchen Gleichung hat eine Kugel um $M(9|7|6)$, die die Ebene E genau berührt? Falls die Kugel k um M den Radius 13 hat, welchen Radius hat dann der Schnittkreis mit der Ebene E?

12. Klasse Lösungen 12
Normalenform und HNF von Ebenen 07

1.

(a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ oder bequemer mit dem $\frac{1}{5}$-fachen $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ansatz: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = d$. Einsetzen von $(11|2|-10)$ liefert $d = 0$.

Also $E_1 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.

(b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder bequemer mit dem $\frac{1}{3}$-fachen $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ansatz: $2x_1 - x_2 = d$. Einsetzen von $(2|6|-1)$ liefert $d = -1$.

Also $E_2 : 2x_1 - x_2 = -2$.

(c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder bequemer mit dem $-\frac{1}{3}$-fachen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ansatz: $x_2 = d$.
Einsetzen von $(2|6|-1)$ liefert $d = 6$.

Also $E_3 : x_2 = 6$.

(d) E_1 geht durch den Ursprung, E_2 ist parallel zur x_3-Achse, E_3 ist parallel zur x_1x_3-Ebene.

(e) Zu E_2:
$$\begin{array}{rl} x_1 = 2 + \lambda - \mu & | \cdot (-2) \\ x_2 = 6 + 2\lambda - 2\mu & | \\ \hline -2x_1 + x_2 = 2 & \end{array}$$

Zu E_3: Zweite Zeile $x_2 = 6$ liefert direkt die parameterfreie Form.

(f)
$$\begin{array}{rl} x_1 = 1 + 2\lambda & | \cdot 3 \\ x_2 = 2 - 3\lambda & | \cdot 2 \\ \hline 3x_1 + 2x_2 = 7 & \end{array}$$
also $x_2 = 3{,}5 - 1{,}5x_1$.

2.
$P \notin E$, denn Einsetzen von P in E liefert $2 - 3 - 7 \stackrel{?}{=} 24$ Widerspruch.

Lotgerade: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$.

3.
Skalarprodukt ausführen: $3(x_1 + 2) + 3x_2 - (x_3 - 9) = 0$, also $3x_1 + 3x_2 - x_3 = -15$.
P in E ergibt eine wahre Aussage:
$3 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) - 6 = -15$ (wahr).

4.

(a) $|\vec{n}_E| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$,

HNF: $E : \frac{1}{7}(3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 14) = 0$.

$|\vec{n}_F| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$,

HNF: $F : \frac{1}{3\sqrt{2}}(x_1 - 4x_2 - x_3 - 12) = 0$.

(b) Mit der HNF berechnet man den Abstand des Punktes P von den Ebenen:
$d(P, E) =$
$|\frac{1}{7}(3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-6) - 14)| = 6$.
$d(P, F) = |\frac{1}{3\sqrt{2}}(4 - 4 \cdot 2 - (-6) - 12)| = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}36$.
Also liegt P näher an F.

(c) Bei Einsetzen in die HNF muss 10 oder -10 resultieren:
$\frac{1}{7}(6x_3 - 14) = \pm 10$, also
$x_3 = \frac{\pm 70 + 14}{6}$, die gesuchten Punkte sind also $(0|0|14)$ und $(0|0|-\frac{28}{3})$.

(d) Radius $r = d(M, E) =$
$|\frac{1}{7}(3 \cdot 9 - 2 \cdot 7 + 6 \cdot 6 - 14)| = 5$.
Also Kugel (→ grund114.pdf):
$(x_1 - 9)^2 + (x_2 - 7)^2 + (x_3 - 6)^2 = 25$.

Aus der Skizze erkennt man, dass der Radius R des Schnittkreises mit Pythagoras berechnet werden kann:

$5^2 + R^2 = 13^2$, also $R = 12$.