12. Klasse Übungsaufgaben — 12
Lagebeziehung Gerade – Gerade — 08

1. Weisen Sie die Lagebeziehung für die Geraden aus grund126.pdf nach:
$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. Gegeben sind die Geraden aus ueb126.pdf, Aufgabe 1:
$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, und $k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\lambda, \mu, \sigma \in \mathbb{R}$.

   (a) Warum kann man die Lagebeziehung von g und h schnell sehen?

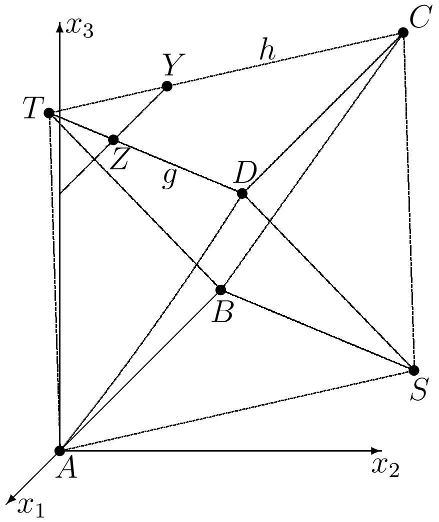
   (b) Weisen Sie die Lagebeziehung von g und k nach.

3. Gegeben sind die Geraden $g_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
$g_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $g_4: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$.
Untersuchen Sie jeweils die Lagebeziehung:

   (a) g_1 und g_2; (b) g_2 und g_3; (c) g_3 und g_4; (d) g_1 und g_4;

   falls sich die Geraden schneiden, bestimmen Sie auch den Schnittwinkel; falls die Geraden parallel sind, bestimmen Sie auch den Abstand.

4. Gegeben ist das nebenstehende Oktaeder durch $A(0|0|0)$, $B(-6|0|0)$, $C(-6|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$, $D(0|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$ und $S(-3|3\sqrt{3}|0)$.



   (a) T ist der Schnittpunkt der Geraden g und h, wobei g eine Parallele zu BS durch D ist und h eine Parallele zu AS durch C ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von T.

   (b) Die im Bild gezeigte Gerade hat die Gleichung $YZ: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.
   Zeigen Sie, dass die Gerade YZ und die x_3-Achse sich schneiden.

   Ergänzender Hinweis: Der Abstand der windschiefen Geraden AS und g kann hier leicht bestimmt werden, da AS in der Ebene $x_3 = 0$ und g in der parallelen Ebene $x_3 = 2\sqrt{6}$ liegt. Der Abstand der beiden windschiefen Geraden ist also $2\sqrt{6}$.

12. Klasse Lösungen — 12
Lagebeziehung Gerade – Gerade — 08

1.
Parallele Ri.vektoren $\vec{u}_h = (-2)\vec{u}_g$.
Aufpunkt von h $(1|4|3)$ liegt nicht auf g (denn $1 = 2 + \lambda$, $4 = 6 + 2\lambda$, $3 = -1 - \lambda$ ergibt aus erster Gleichung $\lambda = -1$ im Widerspruch zur dritten Gleichung).
Also sind g und h echt parallel.

2.
(a) g und h haben gleichen Aufpunkt A, die Ri.vektoren zeigen aber in verschiedene Richtung (nicht Vielfache). Also schneiden sich g, h in $A(3|0|1)$.

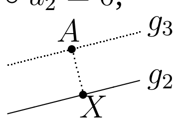
(b) g und k haben gleiche Ri.vektoren. Aufpunkt von k $(7|7|5)$ liegt nicht auf g (denn $7 = 3 - 5\lambda$, $7 = 0 - 5\lambda$, $5 = 1 + \lambda$ führt bereits in den ersten beiden Gleichungen zum Widerspruch). Also sind g und k echt parallel.

3.
(a) Ri.vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ sind nicht parallel. Gleichsetzen ergibt
$-1+\lambda=1$, $-1=2+\mu$, $1-3\lambda=4+3\mu$.
Also $\lambda = 2$, $\mu = -3$, Probe in dritte Gleichung stimmt.
Also schneiden sich g_1 und g_2.
Schnittpunkt $S(1|-1|-5)$.
Schnittwinkel φ aus $\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{1+0+9} \cdot \sqrt{0+1+9}} = 0{,}9$, also $\varphi \approx 25{,}84°$.

(b) Ri.vektoren $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ parallel ($\vec{u}_3 = 2\vec{u}_2$). Aufpunkt von g_3 $(2|4|8)$ eingesetzt in g_2 ergibt bereits in der ersten Zeile $2 = 1 + 0\mu$ einen Widerspruch, also sind g_2 und g_3 echt parallel.

Abstand des g_3-Aufpunkts $A(2|4|8)$ von der Geraden g_2:
Fußpunkt X als allg. g_2-Geradenpunkt ansetzen: $X(1|2+\mu|4+3\mu)$. Bedingung: $\overrightarrow{AX} \perp g_2$, also $\overrightarrow{AX} \circ \vec{u}_2 = 0$;

$$\begin{pmatrix} 1-2 \\ 2+\mu-4 \\ 4+3\mu-8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0;$$



$(-1) \cdot 0 + (-2+\mu) \cdot 1 + (-4+3\mu) \cdot 3 = 0$;
$10\mu = 14$; $\mu = 1{,}4$; also $X(1|3{,}4|8{,}2)$.

(Fortsetzung von Aufgabe 3(b))
Gesuchter Abstand $d(g_2, g_3) = |\overrightarrow{AX}|$
$= \sqrt{(1-2)^2 + (3{,}4-4)^2 + (8{,}2-8)^2}$
$= \sqrt{1{,}4} \approx 1{,}18$.

(c) Ri.vektoren $\vec{u}_3 \| \vec{u}_4$ ($\vec{u}_4 = -1{,}5\vec{u}_3$). Aufpunkt von g_4 $(2|-4|-16)$ eingesetzt in g_3 ergibt $2 = 2$, $-4 = 4 + 2\sigma$, $-16 = 8 + 6\sigma$; aus zweiter Gleichung also $\sigma = -4$, Probe in erster Gleichung stimmt sowieso, in dritter Gleichung $-16 = 8 + 6 \cdot (-4)$ stimmt ebenfalls, also sind g_3 und g_4 identisch.

(d) Ri.vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_4$ sind nicht parallel. Gleichsetzen ergibt $-1 + \lambda = 2$, $-1 = -4 - 3\tau$, $1 - 3\lambda = -16 - 9\tau$.
Aus erster und zweiter Gleichung folgen $\lambda = 3$ und $\tau = -1$; Probe in dritter Gleichung $-8 \neq -7$; g_1 und g_4 sind also windschief.

4.
(a) Aufpunkt von g ist D, Richtungsvektor von g ist $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -3-(-6) \\ 3\sqrt{3}-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$, also $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.
Analog $h : \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.
Gleichsetzen liefert $3\lambda = -6 - 3\mu$, $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\lambda = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\mu$, $2\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$. Multiplikation der ersten Gleichung mit $\sqrt{3}$ und Addition der zweiten Gleichung liefert $2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\lambda = -4\sqrt{3}$, also $\lambda = -1$, $\mu = -1$ und somit Schnittpunkt $T(-3|-\sqrt{3}|2\sqrt{6})$.

(b) x_3-Achse: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ri.vektoren nicht parallel. Gleichsetzen: $-4 + 2\sigma = 0$, $0 = 0$, $2\sqrt{6} = \tau$.
Also $\sigma = 2$, $\tau = 2\sqrt{6}$, Probe in zweiter Gleichung stimmt. Somit schneiden sich YZ und die x_3-Achse.