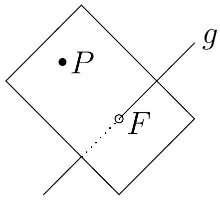
12. Klasse Übungsaufgaben — 12
Lagebeziehung Gerade – Ebene — 09

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und der gegebenen Ebene; falls sie sich schneiden, berechnen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel, falls sie echt parallel sind, den Abstand $d(g, E)$.
   (a) $E : x_1 - x_2 - 5x_3 = 26$
   (b) $E : 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 8 = 0$
   (c) $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$
2. Gegeben sind die Ebene $E : 4x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 3$ und mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}$ die Schar der Geraden $g_k : \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -5 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Für welchen Wert des Parameters k sind E und g_k (a) parallel, (b) senkrecht zueinander?
3. Gegeben sind $s : \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie $E_1 : x_1 + 2x_3 = 4$ und $E_2 : 3x_1 - 4x_2 = 0$.
   (a) Zeigen Sie, dass die Gerade s in beiden Ebenen E_1 und E_2 enthalten ist und somit die Schnittgerade darstellt.
   (b) Berechnen Sie für die Ebenen die Achsenpunkte und die Gleichungen der Spurgeraden und für die Gerade die Spurpunkte. Zeichnen Sie die Ebenen und die Gerade in ein Koordinatensystem.
4. **Lot fällen (d. h. Punkt P auf Ebene projizieren), Punkt an Ebene spiegeln**
   Aus grund127.pdf ist folgende Vorgehensweise bekannt: Mit Aufpunkt P und Richtungsvektor = Normalenvektor der Ebene stellt man die Gleichung der Lotgeraden auf und schneidet sie mit der Ebene.
   Beispiel: Lot vom Punkt $P(-1|-2{,}4|-2{,}5)$ auf $E : 15x_1 + 12x_2 + 20x_3 = 60$:
   Lotgerade $l : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2{,}4 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$ in E: $15(-1+15\tau)+12(-2{,}4+12\tau)+20(-2{,}5+20\tau) = 60$, $\tau = 0{,}2$, also Fußpunkt $F(2|0|1{,}5)$.
   Spiegelpunkt P': $\overrightarrow{FP'} = \overrightarrow{PF}$, also $\vec{P'} - \vec{F} = \vec{F} - \vec{P}$, also $\vec{P'} = 2\vec{F} - \vec{P}$, hier also $P'(5|2{,}4|5{,}5)$.
   Berechnen Sie ebenso Lotfußpunkt und P' für $P(9|2|-5)$ und $E : x_1 - 3x_3 = 4$.
5. **Lotfußpunkt eines Punktes P auf eine Gerade g**
   Zur Bestimmung des Abstands eines Punktes P von einer Geraden g kann anstelle des Verfahrens von grund125.pdf auch durch den Punkt P eine Ebene senkrecht zu g aufgestellt werden und die Gerade g mit dieser Ebene geschnitten werden.

   Beispiel: $P(1|-1|4)$ und g_1 aus Aufgabe 2.
   Ansatz für $E : 2x_1 + x_2 - 5x_3 = d$. Einsetzen von P liefert $d = 2 - 1 - 20 = -19$.
   g_1 in E eingesetzt: $2 \cdot (7 + 2\lambda) + (2 + \lambda) - 5(-2 - 5\lambda) = -19$; $\lambda = -1{,}5$.
   λ in g_1 liefert $F(4|0{,}5|5{,}5)$ und damit Abstand $\overline{PF} = \sqrt{13{,}5}$ wie in grund125.pdf.
   Berechnen Sie so den Abstand des Punktes $P(0|0|-27)$ von s aus Aufgabe 3.
6. Wie kann man die Schnittpunkte der Geraden s aus Aufgabe 3 mit der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 27)^2 = 27^2$ berechnen?

12. Klasse Lösungen	**12**
Lagebeziehung Gerade – Ebene	**09**

1.
Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts $(\lambda|9-4\lambda|-7+\lambda)$ liefert:

(a) $\lambda-(9-4\lambda)-5(-7+\lambda)=26$; $26=26$ (wahr); g liegt in E.

(b) $3\lambda+(9-4\lambda)+2(-7+\lambda)+8=0$; $\lambda=-3$; g und E schneiden sich im Punkt $S(-3|21|-10)$.
Schnittwinkel ψ: $\sin\psi=\frac{|1\cdot 3+(-4)\cdot 1+1\cdot 2|}{\sqrt{1+16+1}\cdot\sqrt{9+1+4}}\approx 0{,}063$; $\psi\approx 3{,}61°$.

(c) $2\lambda+(9-4\lambda)+2(-7+\lambda)=5$; $-5=5$; g und E sind echt parallel.
HNF von E: $|\vec{n}|=\sqrt{4+1+4}=3$, also $E:\frac{1}{3}(2x_1+x_2+2x_3-5)=0$; $d(g,E)=|\frac{1}{3}(2\cdot 0+9+2\cdot(-7))|=\frac{5}{3}$.

2.
(a) Die Bedingung $\vec{u}\circ\vec{n}=0$ liefert $2\cdot 4+k\cdot 2+(-5)\cdot(-10)=0$, also $k=-29$.

(b) Richtungsvektor $\vec{u}$ und Normalvektor $\vec{n}$ müssen Vielfache sein. An der ersten/dritten Koordinate sieht man, dass $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{n}$ sein muss, also $k=\frac{1}{2}\cdot 2=1$.

3.
(a) Einsetzen von s in E_1 bzw. E_2:
$-4+4\lambda+2(4-2\lambda)=4$; $4=4$ (wahr); $3(-4+4\lambda)-4(-3+3\lambda)=0$; $0=0$ (wahr); also liegt s in E_1 und E_2.

(b) Achsenpunkte A_i von E_1 mit der x_i-Achse: $A_1(4|0|0)$, $A_2(0|?|0)$ existiert nicht, $A_3(0|0|2)$.
Also ist E_1 parallel zur x_2-Achse, so dass auch die Spurgeraden mit der x_1x_2-Ebene und mit der x_2x_3-Ebene in x_2-Richtung zeigen (siehe Skizze):

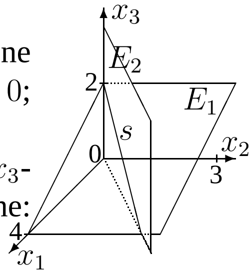
$$s_{12}:\vec{X}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \mu\in\mathbb{R}.$$

$$s_{13}:\vec{X}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix},\ \sigma\in\mathbb{R}.$$

$$s_{23}:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \tau\in\mathbb{R}.$$

(Fortsetzung von 3 (b))
Achsenpunkte B_i von E_2 mit der x_i-Achse: $B_1(0|0|0)$, $B_2(0|0|0)$, $B_3(0|0|?)$: Alle Punkte B_3 liegen in E_2, d. h. E_2 enthält die x_3-Achse, die somit zugleich Spurgerade mit der x_1x_3- und der x_2x_3-Ebene ist:
$$\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ r\in\mathbb{R}.$$
Für die Spurgerade mit der x_1x_2-Ebene benötigt man einen weiteren dort in E_2 liegenden Punkt, z. B. mit $(4|3|0)$: $\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}.$

Spurpunkte von s:
Mit x_1x_2-Ebene $x_3=0$: $4-2\lambda=0$; $\lambda=2$; $S_{12}(4|3|0)$.
Analog mit x_1x_3- und x_2x_3-Ebene: $S_{13}=S_{23}(0|0|2)$.



4.
Lotgerade $l:\vec{X}=\begin{pmatrix}9\\2\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ in E:
$9+\lambda-3(-5-3\lambda)=4$; $\lambda=-2$; $F(7|2|1)$.
Spiegelpunkt P': $\overrightarrow{FP'}=\overrightarrow{PF}$, also $\vec{P'}-\vec{F}=\vec{F}-\vec{P}$, also $\vec{P'}=2\vec{F}-\vec{P}$, also $P'(5|2|7)$.

5.
Bild analog ueb129.pdf. Ansatz für Ebene durch P senkrecht zu s mit Normalvektor = Ri.vektor der Geraden: $4x_1+3x_2-2x_3=d$.
P einsetzen: $4\cdot 0+3\cdot 0-2\cdot(-27)=d$, $d=54$, also Ebene: $E:4x_1+3x_2-2x_3=54$.
s in E: $4(-4+4\lambda)+3(-3+3\lambda)-2(4-2\lambda)=54$; $\lambda=3$ in s einsetzen: $F(8|6|-2)$.
Abstand $d(P,g)=\overline{PF}=\sqrt{(8-0)^2+(6-0)^2+(-2+27)^2}=5\sqrt{29}$

6.
Allgemeinen Geradenpunkt in Kugelgleichung einsetzen: $(-4+4\lambda)^2+(-3+3\lambda)^2+(4-2\lambda+27)^2=729$ liefert quadratische Gleichung mit zwei Lösungen für λ.