7. Klasse Übungsaufgaben 7
Besondere Dreiecke, Tangenten 10

1. Berechnungen im Dreieck.
   (a) In einem Dreieck mit $a = c$ ist $\alpha = 40°$. Berechne β und γ.
   (b) In einem Dreieck mit $b = c$ ist $\alpha = 40{,}4°$. Berechne β und γ.
   (c) Erkläre, was man über die Seitenlängen in einem Dreieck mit $\alpha = 75°$ und $\gamma = 30°$ sagen kann.

2. Zeichnet man einen Kreis, lässt den Radius im Zirkel eingestellt und beginnt man an irgendeiner Stelle der Kreislinie den Radius mehrmals abzutragen, so gelangt man bei genauer Zeichnung genau zum Anfangspunkt zurück. Begründe, warum das so ist.

3. In einem Rechteck liegen die Ecken stets auf einem Kreis über dem Mittelpunkt. Begründe!

   Beschreibe, unter welcher Bedingung auch ein Drachenviereck diese Eigenschaft haben kann.

4. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$, Hypotenuse 3,2 cm und Höhe $h = 1{,}2$ cm.

5. Zeichne ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge 5 cm.

   Berechne die Fläche.

   Begründe, ob die Länge der dritten Dreiecksseite genau 7 cm ist.

6. Konstruiere an den Kreis mit Mittelpunkt $M(1|3)$ und Radius $r = 2$ die Tangenten, die durch den Punkt $P(5|3)$ gehen. Der „obere“ Berührpunkt sei B_1, der „untere“ B_2.

   Konstruiere außerdem die Tangente im Kreispunkt $K(-1|3)$.

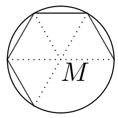
   Die drei Tangenten bilden ein Dreieck. Begründe, warum es gleichseitig ist.

   Anleitung: Bemerke, dass K auf MP liegt und dass $\left|\overline{MP}\right| = 2r$ ist. Durch Spiegelung von M an B_1 erhältst du den Spiegelpunkt M'. Begründe, warum das Dreieck MPM' gleichseitig ist. Wie groß ist also der Winkel $\sphericalangle B_1PM$?

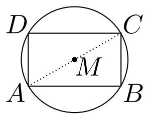
7. Klasse Lösungen	7
Besondere Dreiecke, Tangenten	**10**

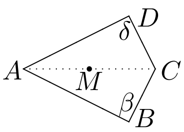
1. (a) Wegen $a = c$ ist das Dreieck gleichschenklig mit Basis b und Basiswinkel $\alpha = \gamma$, also $\gamma = 40°$ und (Winkelsumme im Dreieck!) $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 100°$.
   (b) Gleichschenkliges Δ, Basis a, Basiswinkel $\beta = \gamma = (180° - 40{,}4°) : 2 = 69{,}8°$.
   (c) Der dritte Winkel ist $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 75° = \alpha$, also ist das Dreieck gleichschenklig mit $a = b$. Da der größten Seite der größte Winkel gegenüber liegt, kann man außerdem $c < a$ sagen.

2. Verbindet man die Punkte auf der Kreislinie mit dem Mittelpunkt M, so entstehen jeweils gleichseitige Dreiecke, insbesondere ist also der Winkel bei M je 60°. Da sich der Vollwinkel 360° bei M in genau sechs 60°-Winkel teilen lässt, passen sechs gleichseitige Dreiecke in die Figur, d. h. man kommt mit dem sechsten Dreieck genau zum Ausgangspunkt zurück.



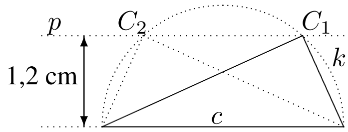
3. Die Ecken D und B liegen auf dem Thaleskreis über der Diaglonalen $\overline{AC}$. (Man könnte auch mit der Punkt- und Achsensymmetrie eines Rechtecks argumentieren, um $\left|\overline{MA}\right| = \left|\overline{MB}\right| = \left|\overline{MC}\right| = \left|\overline{MD}\right|$ zu begründen).



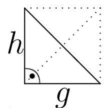


Bei einem solchen Drachenviereck liegen B und D auf dem (Thales-)Kreis über $\overline{AC}$, wenn $\beta = \delta = 90°$. Der Kreismittelpunkt M ist dann der Mittelpunkt von $\overline{AC}$.

4. Erster Schritt: Hypotenuse $c = 3{,}2$ cm antragen.
   Zweiter Schritt: Thaleskreis k über c.
   Dritter Schritt: Parallele p zu c im Abstand 1,2 cm.
   Der dritte Dreieckspunkt ist der Schnittpunkt von p und k (zwei Lösungen C_1 und C_2).



5. Fasst man eine Kathete als Grundlinie g des Dreiecks auf, so ist die andere Kathete die Höhe h, Fläche also $A_\Delta = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2} \cdot 5$ cm $\cdot 5$ cm $= 12{,}5$ cm^2.



   Fasst man die Hypotenuse als Grundlinie auf, so erkennt man aus obiger (verkleinerter) Figur (Dreieck als halbes Quadrat), dass die Höhe darauf genau halb so lang wie die Hypotenuse ist. Daher kann die Hypotenuse nicht 7 cm messen, denn sonst wäre A_Δ auch $\frac{1}{2} \cdot 7$ cm $\cdot 3{,}5$ cm $= 12{,}25$ cm^2; somit ist die Hypotenuse etwas länger als 7 cm.

6. B_1 und B_2 werden mittels der Thaleskreises über $\overline{MP}$ konstruiert; der Mittelpunkt des Thaleskreises ist der Mittelpunkt N der Strecke $\overline{MP}$.
   Die Tangente in K wird senkrecht auf $\overline{MK}$ gezeichnet.
   Die Tangenten bilden ein gleichseitiges Dreieck PS_1S_2, denn: Spiegelt man M an PB_1 (Spiegelpunkt M'), so entsteht $\Delta MPM'$ mit $\left|\overline{MP}\right| = 2r$, $\left|\overline{MM'}\right| = 2 \cdot \left|\overline{MB_1}\right| = 2r$ und (weil gespiegelt) $\left|\overline{M'P}\right| = \left|\overline{MP}\right| = 2r$, also ist $\Delta MPM'$ gleichseitig und somit $\sphericalangle PMM' = \sphericalangle MM'P = \sphericalangle M'PM = 60°$ und $\sphericalangle B_1PM = 30°$. Wegen des rechten Winkels bei K kann man im ΔKPS_1 folgern, dass der Winkel bei S_1 gleich 60° misst. Wegen der Symmetrie der „unteren" Hälfte ist auch bei S_2 ein 60°-Winkel. Also besitzt das aus den drei Tangenten gebildete Dreieck lauter 60°-Winkel und ist somit gleichseitig.