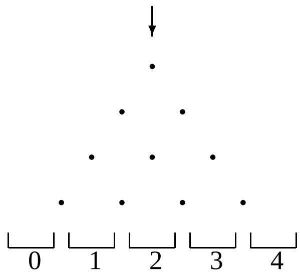
8. Klasse Übungsaufgaben — 8
Wahrscheinlichkeiten, Laplace-Experimente — 05

1. Warum ist das Beispiel in grund85.pdf in Wirklichkeit kein Laplace-Experiment?

2. Ein Galton-Brett ist ein vertikal aufgestelltes Brett mit einem Gitter von Nägeln. Die auf den ersten Nagel oben fallende Kugel wird dort nach rechts oder links abgelenkt und trifft dann auf die Nägel der nächsten Reihe. Schließlich fällt sie unten in eines der Fächer. Die Abbildung rechts zeigt ein 4-stufiges Galton-Brett.



   Warum ist zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten die Aufzählung der Fach-Nummern $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ eher ungünstig? Wie muss Ω gewählt werden, damit es ein Laplace-Raum ist? Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in Fach 0 fällt! Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sie in Fach 3 fällt!

3. Ein Rommé-Blatt besteht aus 110 Karten: Herz (rot), Karo (rot), Kreuz (schwarz), Pik (schwarz), jeweils 2, 3, 4, …, 10, Bube (Wert 10), Dame (10), König (10), As (11), je 2 -mal, dazu 6 Joker (20). Eine Karte wird zufällig gezogen.

   Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

   A: „Es wird ein As (kein Joker) gezogen“ — $E = A \cap D$
   B: „Es wird eine rote Karte (kein Joker) gezogen“ — $F = A \cap B$
   C: „Es wird ein Joker gezogen“ — $G = A \cup B \cup C$
   D: „Es werden weniger als 5 Augen gezogen“ — $H = \overline{D}$

   Formuliere E, F, G und H in Worten.

4. In der Kantine gibt es als Mittagessen zur Wahl: Apfelstrudel, Brathuhn oder Currywurst. Drei Personen stehen Schlange und nennen der Reihe nach ihren Wunsch.

   Erstelle ein Baumdiagramm!

   Wie groß ist bei Annahme eines Laplace-Modells die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E, dass die Wünsche nicht alle erfüllt werden können, wenn der Koch von jedem Gericht nur noch eines vorrätig hat?

5. An der Garderobe werden an 4 Gäste im Dunkeln 4 Mäntel zurückgegeben.

   (a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass kein Gast den eigenen Mantel erhält.

   (b) Zuerst werden 2 Mäntel an ein Ehepaar ausgegeben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es genau die Mäntel der beiden Ehepartner sind.
   Hinweis: Diese Teilaufgabe kann sowohl mit Berücksichtigung der Reihenfolge als auch ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gelöst werden.

6. In der Bibliothek stehen 10 verschiedene Bände einer beliebten Jugendbuch-Serie. 4 Schüler äußern jeweils einen Buch-Wunsch. Betrachte im Laplace-Modell das Ereignis E: „Jeder Schüler wünscht ein anderes Buch“. Zeige: $P(E) \approx 50$ %.

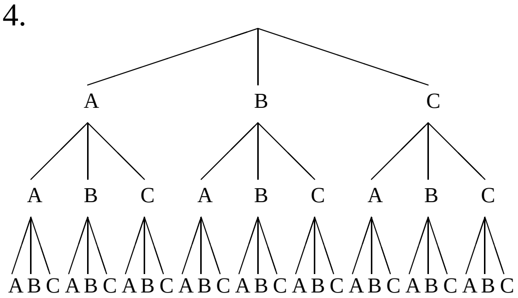
   Angenommen, bei 10-maliger Durchführung dieses Experiments tritt das Ereignis E nur 2-mal ein. Beweist dies, dass die Laplace-Annahme falsch war?

8. Klasse Lösungen — 8
Wahrscheinlichkeiten, Laplace-Experimente — 05

1.
Die Stockwerke des Kaufhauses werden unterschiedlich attraktiv sein, so dass sich keine Gleichwahrscheinlichkeit ergibt. Zudem könnten bei Herrn A und Frau B „Abhängigkeiten“ bestehen, dass beide gemeinsam häufiger das gleiche Stockwerk wählen.

2.
$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ist ungünstig, da die Fächer nicht gleichwahrscheinlich sind.
Besser mit den links/rechts (L/R)-„Entscheidungen“ der Kugeln, also als Laplace-Raum $\Omega = \{LLLL, LLLR, LLRL, \ldots, RRRR\}$.
Da jedes Mal 2 Wahlmöglichkeiten vorliegen, ist $|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.
A = „Kugel fällt in Fach 0“ $= \{LLLL\}$, $P(A) = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25$ %
B = „... Fach 3“ $= \{LRRR, RLRR, RRLR, RRRL\}$, $P(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 25$ %

3.
$|\Omega| = 110$.
$|A| = 8$, $P(A) = \frac{8}{110} \approx 0{,}073 = 7{,}3$ %
$|B| = 52$, $P(B) = \frac{52}{110} \approx 0{,}473 = 47{,}3$ %
$|C| = 6$, $P(C) = \frac{6}{110} \approx 0{,}055 = 5{,}5$ %
$|D| = 24$, $P(D) = \frac{24}{110} \approx 0{,}218 = 21{,}8$ % („< 5“, also 2, 3 oder 4)
$|E| = 0$, $P(E) = 0$ (unmögliches Ereignis)
$|F| = 4$, $P(F) = \frac{4}{110} \approx 0{,}036 = 3{,}6$ % („es wird ein rotes As gezogen“)
$|G| = 8+52-4+6$, $P(G) = \frac{62}{110} \approx 0{,}564 = 56{,}4$ % („es wird eine rote Karte oder ein As oder ein Joker gezogen“)
$|H| = 110-24$, $P(H) = 1-P(D) = \frac{86}{110} \approx 0{,}782 = 78{,}2$ % („es werden mindestens [$\geq$] 5 Augen gezogen, d. h. mehr als 4“)

4.


4. (Fortsetzung)
E: Ein Gericht wird mindestens 2-mal gewünscht (also z. B. AAA, AAB). Zählt man im Baumdiagramm alle solchen Pfade durch, so erhält man 21 von 27 Möglichkeiten, also $P(E) = \frac{21}{27} = \frac{7}{9} \approx 77{,}8$ %.

5.
(a) Nummeriert man die Mäntel wie die entsprechenden Personen in der Rückgabe-Schlange, so ist $\Omega = \{1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321\}$
(z. B. 4132 bedeutet, dass die erste Person Mantel Nr. 4 erhält, die zweite Mantel Nr. 1, die dritte den eigenen Nr. 3, die vierte Nr. 2).

$A = \{2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321\}$,
$P(A) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5$ %

(b) Im Modell aus Teilaufgabe (a) mit Reihenfolge ist $B = \{1234, 1243, 2134, 2143\}$, also $P(B) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

Notiert man ohne Reihenfolge die im „2-er-Pack“ zuerst ausgegebenen Mäntel, so ist $\Omega = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$ und $B = \{12\}$, also wieder $P(B) = \frac{1}{6}$.

6.
Alle Möglichkeiten: Der erste Schüler kann 10 Buch-Wünsche äußern, der zweite ebenso usw., also $|\Omega| = 10^4$.
Günstige Möglichkeiten: Wenn jeder Schüler ein anderes Buch wünscht, kann der erste Schüler 10 Wünsche äußern, der zweite nur noch 9, der dritte 8 usw. Also:
$P(E) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4} = 0{,}504 = 50{,}4$ %
Eine relative Häufigkeit von $\frac{2}{10}$ im realen Experiment widerlegt noch nicht die Laplace-Annahme, da sich zufällig ein solcher Versuchsausgang einstellen kann.
Nur bei sehr vielen Versuchen könnte man nach dem Gesetz der großen Zahlen eine solche Vermutung äußern, aber ein Beweis wäre es immer noch nicht.