8. Klasse Übungsaufgaben	**8**
Gebrochen-rationale Funktionen	**07**

1. Zeichne mit Hilfe einer Wertetabelle die Graphen zu folgenden Funktionsgleichungen; bestimme waagrechte und senkrechte Asymptote.

   (a) $y = \dfrac{2x}{x+3}$ (b) $y = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2}$ (c) $y = \dfrac{1-x}{2x+3}$ (d) $y = \dfrac{5}{(3x+2)^2}$

2. Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = \dfrac{3}{x}$ und bestimme damit die Graphen von $g(x) = -\dfrac{3}{x} - 2$, $h(x) = \dfrac{3}{x+1{,}5}$ und $k(x) = \dfrac{1{,}5}{x}$

3. Bestimme den Definitionsbereich:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-5)}$ (b) $f(x) = \dfrac{7x-3}{8x-5}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} + 7x$

4. Anwendungsbeispiele:

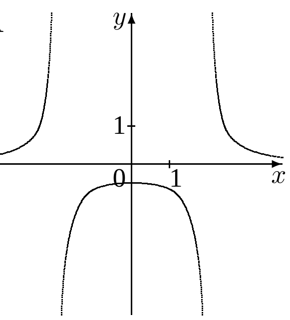
   (a) Zur Bestimmung der Schwerkraft y (in N) auf einen Körper der Masse 1 kg in der Entfernung x von der Erdoberfläche (in km) gilt die Formel $y = \dfrac{4 \cdot 10^8}{(6370+x)^2}$. Was erhält man für $x = 0$? Was für sehr große x-Werte?

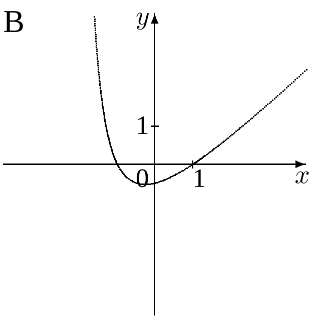
   (b) Ist K_{alt} das Anfangskapital eines Aktienbesitzers und K_{neu} das Endguthaben bei der Rendite („Zinssatz“) x (als Dezimalzahl, also $x = 0{,}03$ bei 3 %), so berechnet man das Endguthaben mit $K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} \cdot (1+x)$. Umgekehrt war also das Anfangsguthaben $K_{\text{alt}} = \dfrac{K_{\text{neu}}}{1+x}$ bzw. als Funktionsterm geschrieben z. B. bei $K_{\text{neu}} = 15000$:

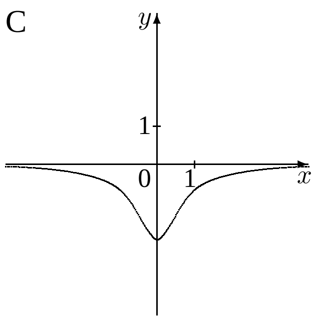
   $$f(x) = \frac{15000}{1+x}$$

   Wie müssten in diesem Beispiel negative x-Werte (z. B. $x = -0{,}8$) interpretiert werden? Wie die Definitionslücke? Wie die waagrechte Asymptote?

5. Ordne die Funktionsterme $f(x) = -\dfrac{4}{4x^2+2}$, $g(x) = \dfrac{2}{x^2-4}$ und $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ den folgenden Graphen zu; begründe!

A


B


C


8. Klasse Lösungen	8
Gebrochen-rationale Funktionen	**07**

1. Aus Platzgründen sind die Wertetabellen hier stark verkürzt und gerundet:

(a)

x	-3	0	3	100
y	↯	0	1	$1{,}9$

Asymptoten:
Waagrecht: $y = 2$
Senkrecht: $x = -3$

(b)

x	-3	0	3	100
y	$2{,}2$	↯	$0{,}8$	$1{,}5$

Asymptoten:
Waagrecht: $y = 1{,}5$
Senkrecht: $x = 0$

(c)

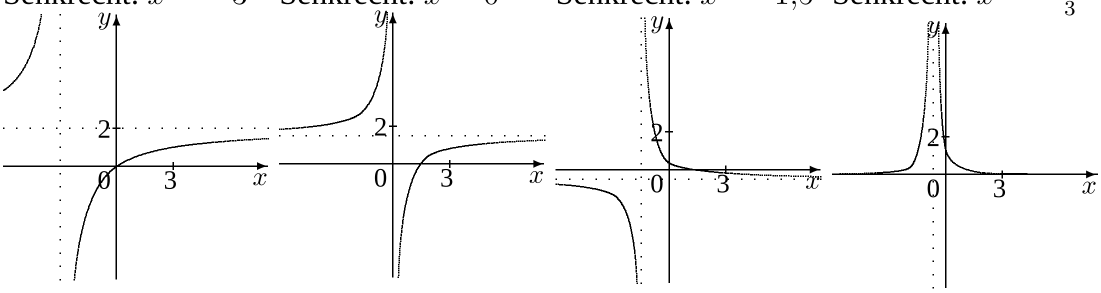
x	-3	0	3	100
y	$-1{,}3$	$0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}5$

Asymptoten:
Waagrecht: $y = -0{,}5$
Senkrecht: $x = -1{,}5$

(d)

x	-3	0	3	100
y	$0{,}1$	$1{,}3$	0	0

Asymptoten:
Waagrecht: $y = 0$
Senkrecht: $x = -\frac{2}{3}$



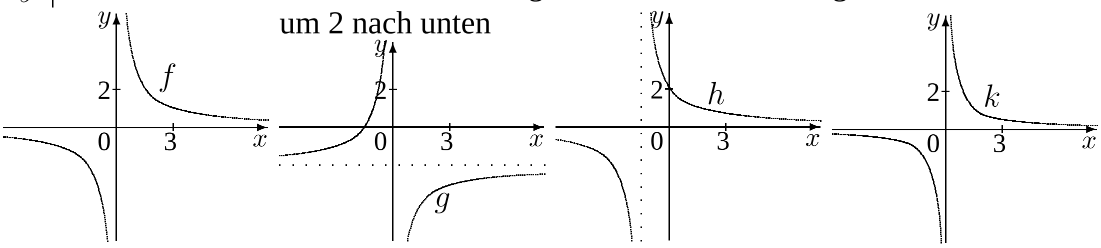
2.

x	-3	0	1	3
y	-3	↯	3	1

Spiegelung an der x-Achse, Verschiebung um 2 nach unten

Verschiebung um 1,5 nach links

Alle y-Werte halb so groß



3. (a) $D = \mathbb{Q}\setminus\{0; 5\}$ (Das Produkt im Nenner ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist)
   (b) $D = \mathbb{Q}\setminus\{\frac{5}{8}\}$ (Nebenrechnung: $8x - 5 = 0$; $8x = 5$; $x = \frac{5}{8}$)
   (c) $D = \mathbb{Q}\setminus\{1\}$ (Nebenrechnung: $(x-1)^2 = 0$; $x - 1 = 0$; $x = 1$)

4. (a) $x = 0$: $y = \frac{4\cdot 10^8}{6370^2} = 9{,}86$ (vgl. Physik: Ortsfaktor)
   $x \to \infty$: $y = 0$ (Weit draußen im Weltraum verschwindet die Anziehungskraft)

   (b) $x = -0{,}8 = -80$ % bedeutet eine Kapitalverminderung um 80 %, also auf 20 % $= \frac{1}{5}$ des Anfangswertes; umgekehrt war also der Anfangswert 5-mal so groß: $f(-0{,}8) = \frac{15000}{1-0{,}8} = 75000$.
   Definitionslücke $x = -1$: Bei Kapitalverminderung um 100 % bliebe nichts mehr übrig (der Fall eines Endkapitals von 75000 kann also nicht sein).
   Waagrechte Asymptote für große x (= starke Kapitalvermehrung, z. B. um 100 = 10000 %) ist $y = 0$; das würde bedeuten, dass aus einem Anfangskapital von fast 0 das Endkapital entsteht.

5. Die Begründung ist z. B. möglich mit jeweils einer kleinen Wertetabelle und Vergleich mit den Zeichnungen. Oder anhand des Definitionsbereichs (Nenner betrachten!):

   $f(x)$: C, weil Nenner $4x^2 + 2$ stets positiv, also keine Definitionslücke.
   $g(x)$: A, weil $D = \mathbb{Q}\setminus\{-2; 2\}$: Zwei Definitionslücken $x = -2$ und $x = 2$.
   $h(x)$: B, weil $D = \mathbb{Q}\setminus\{-2\}$: Einzige Definitionslücke $x = -2$.