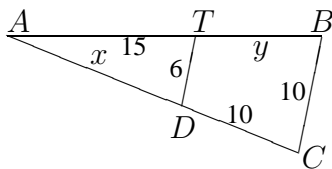


8. Klasse Übungsaufgaben	8
Strahlensatz, Ähnlichkeit, Streckung	09

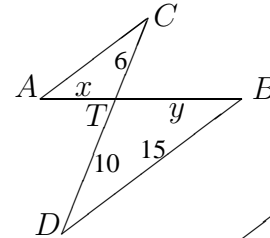
1. Bestimme jeweils x und y ; in welchem Verhältnis teilt T die Strecke $[AB]$?

(a) $DT \parallel CB$

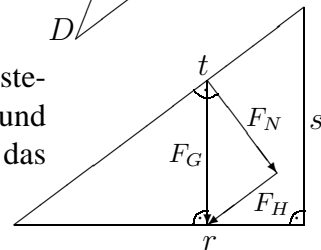


(b) $\overline{AB} = 15$

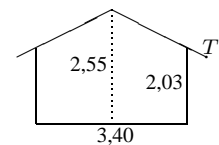
$AC \parallel DB$



2. In der Physik werden manchmal Skizzen wie die nebenstehende betrachtet (mit $F_H \parallel t$). Warum sind das von r, s, t und das von F_N, F_H, F_G gebildete Dreieck ähnlich? Ergänze das Streckenverhältnis: $\frac{F_H}{F_G} = \dots$.



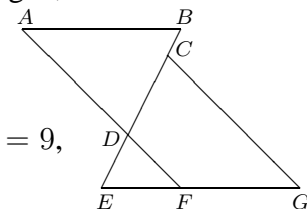
3. Beim nebenstehenden Gartenhaus (Maße in m) beträgt der Dachüberstand 0,10 m, so dass die bedachte Länge 3,60 m beträgt. In welcher Höhe über dem Boden befindet sich dann die Dachrinne T ?



4. (a) Stelle die Formeln in den Strahlensätzen aus grund89.pdf so um, dass das Verhältnis der Streckenstücke, die auf einer Geraden liegen, auf der einen Gleichungsseite steht: $\frac{ZA}{ZA'} = \dots = \dots$

(b) Forme weiter um: $\frac{ZA}{AA'} = \dots = \dots$

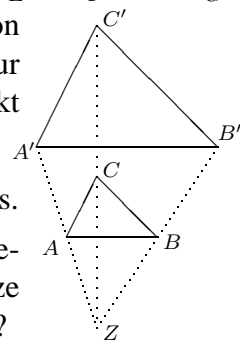
(c) In nebenstehender Skizze ist $\overline{AB} = 12, \overline{EF} = 6, \overline{FG} = 9, \overline{CG} = 14, AB \parallel EG$ und $AF \parallel CG$. Berechne \overline{AD} .



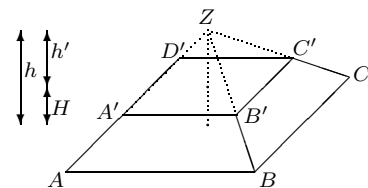
5. Bei zentrischen Streckungen gibt es ein Streckungszentrum Z , von dem aus eine Figur (z. B. das Dreieck $\triangle ABC$) zur Bildfigur ($\triangle A'B'C'$) gestreckt wird. Z liegt auf den Geraden Punkt-Bildpunkt (also AA', BB', CC').

(a) Drücke den Streckungsfaktor m auf verschiedene Weisen aus.

(b) Es gibt auch zentrische Streckungen mit $m < 0$. A und A' liegen dann auf verschiedenen Seiten von Z . Fertige eine Skizze für $m = -\frac{1}{2}$ an. Welcher Spezialfall ergibt sich für $m = -1$?

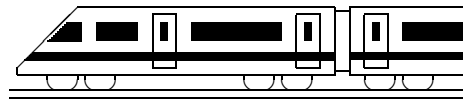


6. Einen Pyramidenstumpf kann man sich denken als eine große Pyramide, der man eine zentrisch verkleinerte Pyramide weggenommen hat.



(a) Gegeben sind $\overline{AB} = 5, \overline{A'B'} = 3$ und die Pyramidenstumpf-Höhe $H = 1$. Bestimme den Streckungsfaktor m und die Höhe h der Gesamtpyramide.

(b) Vergleiche mit der Pyramiden-Volumen-Formel $V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3}Gh$ (Grundfläche G , Höhe h) die Volumina der ganzen und der oberen kleinen Pyramide.



8. Klasse Lösungen	8
Strahlensatz, Ähnlichkeit, Streckung	09

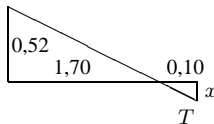
1. (a) $\triangle ADT \sim \triangle ACB$, also $\frac{\overline{AD}}{\overline{TD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$
 $\frac{x}{6} = \frac{x+10}{10}; \quad 10x = 6x + 60$
 $x = 15$
 Ebenso $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{TD}}$
 $\frac{15+y}{10} = \frac{15}{6}; \quad 6(15+y) = 15 \cdot 10$
 $90 + 6y = 150$
 $y = 10$
 Teilverhältnis $\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = \frac{6}{10-6}$
- (b) $\triangle ATC \sim \triangle BTD$, also $\frac{\overline{AT}}{\overline{TC}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{TD}}$
 $\frac{x}{6} = \frac{y}{10}; \quad 10x = 6y$
 Ferner $\overline{AB} = x + y = 15$,
 also $y = 15 - x$ eingesetzt:
 $10x = 6(15 - x); \quad 10x = 90 - 6x$
 $x = \frac{90}{16} = \frac{45}{8} = 5,625$
 $y = 15 - x = 15 - \frac{45}{8} = \frac{75}{8} = 9,375$
 Teilverhältnis $\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{x}{y} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

2. Die Dreiecke sind ähnlich, da sie in den Winkeln übereinstimmen, denn:

$$\sphericalangle(r, t) = 90^\circ - \sphericalangle(t, F_G) = \sphericalangle(F_G, F_N), \quad \sphericalangle(s, r) = 90^\circ = \sphericalangle(F_N, F_H).$$

$$\frac{F_H}{F_G} = \frac{\text{kürzere Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{s}{t}$$

3. Nach Einzeichnen einer Hilfslinie auf Höhe der Seitenwand folgt:



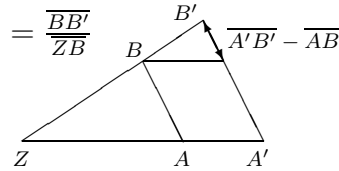
$$\frac{x}{0,10} = \frac{0,52}{1,70}, \text{ also } x = \frac{0,52 \cdot 0,10}{1,70} \approx 0,03.$$

Somit befindet sich T etwa $2,03 - 0,03 = 2,00$ m über dem Boden.

4. (a) $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ (d. h. die Querstrecken verhalten sich wie die von Z aus gemessenen Stücke auf den Schenkeln)

$$(b) \frac{\overline{AA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZA'} - \overline{ZA}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} - 1 = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} - 1 = \frac{\overline{ZB'} - \overline{ZB}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{ZB}}$$

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} - 1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} - 1 = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}}$$



(c) Betrachte V-Figur von E aus: $\frac{\overline{DF}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{EG}}$, also $\overline{DF} = \frac{\overline{CG} \cdot \overline{EF}}{\overline{EG}} = \frac{14 \cdot 6}{6+9} = 5,6$.

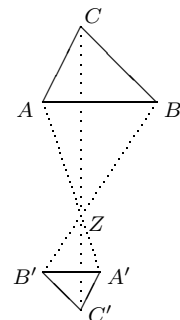
Betrachte X-Figur von D aus: $\frac{\overline{AD}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$, also $\overline{AD} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DF}}{\overline{EF}} = \frac{12 \cdot 5,6}{6} = 11,2$.

Tipp: Das Umstellen der Formel ist bequemer, wenn man beim Aufschreiben der Verhältnisse die gesuchte Streckenlänge in den Zähler schreibt.

5. (a) $m = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZC'}}{\overline{ZC}}$

(b) Für $m = -\frac{1}{2}$ siehe Bild rechts.

Für $m = -1$ erhält man eine Punktspiegelung an Z.



6. (a) $m = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$.

Für die Höhen gilt der gleiche Streckungsfaktor: $\frac{h'}{h} = \frac{3}{5}$. Ferner $h = h' + H$.

Auflösen der ersten Gleichung nach h' und Einsetzen in die zweite liefert

$$h = \frac{3}{5}h + H, \quad \frac{2}{5}h = H, \quad h = \frac{5}{2}H = 2,5.$$

(b) $V = \frac{1}{3}Gh$, verkleinerte Pyramide: $V' = \frac{1}{3}G'h'$.

Da Flächen mit dem Faktor m^2 zu multiplizieren sind, folgt

$$V' = \frac{1}{3}m^2G \cdot mh = m^3 \cdot \frac{1}{3}Gh = m^3V$$