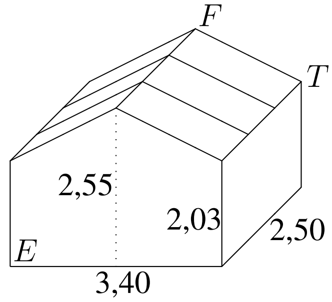
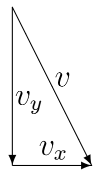
9. Klasse Übungsaufgaben — 9
Pythagoras — 03

1. (a) Notiere die Formel für den Abstand der Punkte $P(x_p|y_p)$ und $Q(x_q|y_q)$. Mache Dir die Formel anhand einer Skizze klar.
   (b) Berechne die Seitenlängen des Dreiecks ABC mit $A(3|2)$, $B(1|1)$, $C(5|-2)$.
   (c) Vom Satz von Pythagoras gilt auch die Umkehrung, d. h. gilt $a^2 + b^2 = c^2$, so hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel. Zeige damit, dass das Dreieck aus Teilaufgabe (b) bei A rechtwinklig ist.



2. (a) Wie lang ist der längste Faden, den eine Spinne geradlinig im nebenstehenden Holzhäuschen (Maße in m) spannen könnte?
   (b) Wie viel m^2 Dachfläche hat das nebenstehende Holzhäuschen?

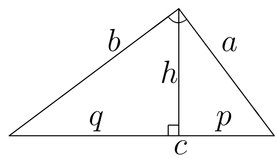
3. Anwendung in der Physik: Geschwindigkeitspfeile werden oft zerlegt in Horizontalgeschwindigkeit v_x und Vertikalgeschwindigkeit v_y.
   Dabei können v_x und v_y je nach Richtung (rechts/links bzw. oben/unten) positiv oder negativ sein. Beim Vektor v betrachten wir hier die Pfeillänge $|v|$.



   Ergänze die Tabelle:

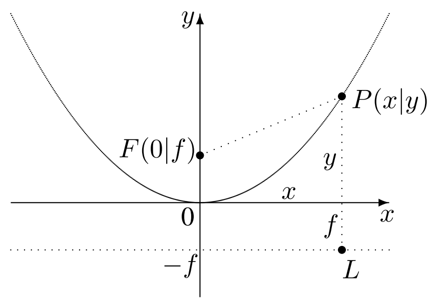
v_x	5	6			3	7
v_y	12	-8	0,8	15		
$\lvert v\rvert$			1	17	5	25

4. (a) Berechne Inkreisradius und Kantenlänge eines regelmäßigen Sechsecks mit Umkreisradius r (allgemein in Abhängigkeit von r).
   (b) Suche im regelmäßigen Achteck Hilfslinien, durch die rechtwinklige Dreiecke entstehen.



5. (a) Stelle für die nebenstehende Figur drei Pythagoras-Formeln auf!
   (b) Im rechtwinkligen Dreieck gilt auch der Kathetensatz $a^2 = pc$ (ebenso $b^2 = qc$), der z. B. mit Hilfe ähnlicher Dreiecke ($\rightarrow$ grund89.pdf) bewiesen werden kann.
   Setze damit (und mit Hilfe von Teilaufgabe (a)) den hier vorgegebenen Ansatz fort und folgere damit den sog. Höhensatz: $pq = p(c-p) = \ldots$

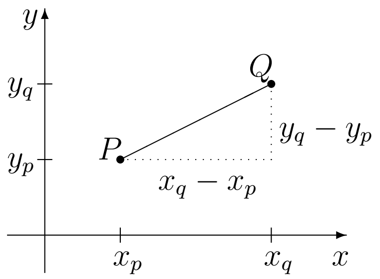
6. Gegeben ist die Standardnormalparabel $y = x^2$ (siehe grund96.pdf).
   Welcher Punkt $F(0|f)$ liegt vom Parabelpunkt $P(x|y)$ ebenso weit entfernt wie P von der Geraden $y = -f$ („Leitlinie“)?
   (F heißt Brennpunkt der Parabel.)



9. Klasse Lösungen — 9
Pythagoras — 03

1.

(a) $\overline{PQ} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$



(b) $\overline{AB} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$,

$\overline{BC} = \sqrt{(5-1)^2 + (-2-1)^2} =$
$= \sqrt{16+9} = 5$,

$\overline{AC} = \sqrt{(5-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20}$.

(c) Ist bei A der rechte Winkel, so ist $[BC]$ die Hypotenuse; es muss also gelten $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$.

Dies gilt wegen $\overline{BC}^2 = 25$,
$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 20 + 5 = 25$.

2.

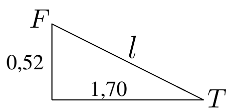
(a) Als längste Strecke kommen in Betracht: Von der vorderen unteren Ecke E zur hinteren Firstecke F oder von E zur Trauf-Ecke T.

Wie bei der Diagonalen im Quader (→ grund96.pdf) berechnet man:

$\overline{EF}^2 = 1{,}70^2 + 2{,}50^2 + 2{,}55^2$,
$\overline{EF} \approx 3{,}96$.

$\overline{ET}^2 = 3{,}40^2 + 2{,}50^2 + 2{,}03^2$,
$\overline{ET} \approx 4{,}68$ (alles in m).

Längster Faden also: 4,68 m.

(b) 

Dachlänge:
$l^2 = 0{,}52^2 + 1{,}70^2$, $l \approx 1,78$.

Dach links: $A \approx 1{,}78 \cdot 2{,}50 \approx 4,45$

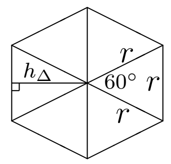
Dachfläche: $2A \approx 8,9$ (m²)

3.

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$, also $v_x = \pm\sqrt{v^2 - v_y^2}$,
$v_y = \pm\sqrt{v^2 - v_x^2}$, $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

v_x	5	6	±0,6	±8	3	7
v_y	12	−8	0,8	15	±4	±24
$\lvert v\rvert$	13	10	1	17	5	25

4.

(a) 

Das regelmäßige Sechseck kann in gleichseitige Dreiecke zerlegt werden. Daher ist die Kantenlänge gleich dem Umkreisradius r. Der Inkreisradius ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck: $h_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}r$.

(c) Nennt man die Ecken $A_1, A_2, \ldots, A_8$ und den Mittelpunkt M, so zeichne man die Verbindungslinie $[A_1A_3]$ ein. Dann ist MA_1A_3 ein rechtwinkliges Dreieck, das durch $[MA_2]$ in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird.

5.

(a) $p^2 + h^2 = a^2$, $q^2 + h^2 = b^2$, $a^2 + b^2 = c^2$

(b) Aus (a) folgt $h^2 = a^2 - p^2$. Somit

$pq = p(c-p) = pc - p^2 =$
$= a^2 - p^2 = h^2$ (Höhensatz)

6.

Es soll gelten: $\overline{FP} = \overline{PL}$
Mit der Formel für Abstände im Koordinatensystem folgt:
$\sqrt{x^2 + (y-f)^2} = y + f$
Quadrieren beider Seiten:
$x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2$
$x^2 + y^2 - 2yf + f^2 = y^2 + 2yf + f^2$
$x^2 = 4yf$
Mit $y = x^2$ folgt
$x^2 = 4x^2 f$
$f = \frac{1}{4}$. Also Brennpunkt $F(0|\frac{1}{4})$.