9. Klasse Übungsaufgaben — 9
Quadratische Funktionen: Scheitel — 05

1. Bestimme den Scheitel:
   (a) $y = x^2 - 3x - \frac{3}{4}$ (mit quadratischer Ergänzung)
   (b) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 11$ (mit quadratischer Ergänzung)
   (c) $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 24$ (mit Hilfe der Nullstellen)

2. Wie lautet die Gleichung einer nach unten geöffneten Standardparabel mit Scheitel $(5|2)$?

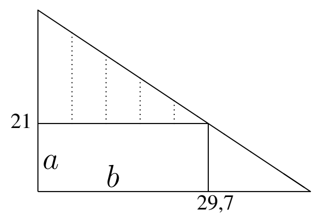
3. Wodurch unterscheiden sich die Parabeln $y = 3x^2 - 18x + 27$ und $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$?

4. Bestimme den Scheitel der Parabel, die durch die Punkte $A(-1|-38)$, $B(1|-18)$ und $C(3|-6)$ geht.

   Anleitung: Setze in den Ansatz $y = ax^2 + bx + c$ den x- und y-Wert jeweils eines Punktes ein und gewinne so ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen für die Variablen a, b, c. Zur Lösung von linearen Gleichungssystemen siehe grund84.pdf und ueb84.pdf, Aufgabe 3.

5. In dieser Aufgabe wird der Funktionsterm einer quadratischen Funktion aufgestellt für die Summe aller natürlichen Zahlen bis zur Zahl x.
   (a) Betrachte zunächst die Summe $s = 1 + 2 + 3 + \ldots + 11 + 12$.
   Studiere folgenden Trick zur Berechnung von s:
   $$\begin{array}{rl} s = 1 + 2 + \ldots + 12 & \\ \underline{s = 12 + 11 + \ldots + 1} & \\ 2s = 13 + 13 + \ldots + 13 & = \quad 12 \cdot 13, \text{ also } s = 78 \end{array}$$
   Verwende denselben Trick, um $1 + 2 + \ldots + 98 + 99$ zu bestimmen.
   (b) Begründe ebenso: $1 + 2 + \ldots + x = \frac{x(x+1)}{2}$
   (c) Bestimme den Scheitel zur Funktionsgleichung $y = \frac{x(x+1)}{2}$

6. Aus einem diagonal halbierten DIN A 4-Blatt soll entsprechend nebenstehender Zeichnung ein möglichst großflächiges Rechteck geschnitten werden.



   Hinweis: Gehe in folgenden Schritten vor:
   - Schreibe für die **G**röße, die maximiert werden soll, eine einfache Formel.
   - Die Maße a und b des Rechtecks sind durch eine sog. **N**ebenbedingung verknüpft (denn je größer a, desto kleiner ist b). Mache dir klar, dass gilt: $\frac{29{,}7}{21} = \frac{b}{21-a}$
   - **A**uflösen dieser Gleichung nach b.
   - Durch Einsetzen in die anfängliche Formel erhält man eine **D**arstellung mit nur einer Variablen in Form einer quadratischen Funktionsgleichung. Führe eine Umbenennung durch (x statt a).
   - Durch Suche des Scheitels findet man das **E**xtremum, d. h. die Breite a, für die die Fläche extremal (hier: maximal) wird.

9. Klasse Lösungen	9
Quadratische Funktionen: Scheitel	05

1.

(a) $y = x^2 - 3x - \frac{3}{4} =$
$= (x - 1{,}5)^2 - 2{,}25 - \frac{3}{4} =$
$= (x - 1{,}5)^2 - 3.$ Also $S(1{,}5|{-3})$.

(b) $y = -\frac{1}{4}[x^2 - 24x + 44] =$
$= -\frac{1}{4}[(x - 12)^2 - 144 + 44] =$
$= -\frac{1}{4}(x - 12)^2 + 25$. Also $S(12|25)$.

(c) $0{,}5x^2 + 4x - 24 = 0$ liefert
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 24}}{2 \cdot 0{,}5} = -4 \pm 8$.
Mitte, also Scheitel, bei $x = -4$.
y-Wert: $y = 0{,}5(-4)^2 + 4 \cdot (-4) - 24 = -32$. Also $S(-4| - 32)$.

2.
$y = -(x - 5)^2 + 2 = -x^2 + 10x - 23$

3.
Wegen $y = 3x^2 - 18x + 27 = 3[x^2 - 6x + 9] = 3(x - 3)^2$ und $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{3}[x^2 - 6x + 9] = \frac{1}{3}(x - 3)^2$ haben beide Parabeln den gleichen Scheitel $S(3|0)$; beide sind nach oben geöffnet, lediglich die erste enger, die zweite weiter.

4.
Ansatz: $y = ax^2 + bx + c$.
Einsetzen der gegebenen Punkte:
A: $-38 = a - b + c \quad | \cdot (-1)$
B: $-18 = a + b + c \quad | \cdot 1$
C: $-6 = 9a + 3b + c$
$20 = 2b$, also $b = 10$.
Einsetzen in obige Gleichungen A und C:
$-38 = a - 10 + c \quad | \cdot (-1)$
$-6 = 9a + 30 + c \quad | \cdot 1$
$32 = 8a + 40$, also $-8 = 8a$; $a = -1$.
Einsetzen in $-38 = a - 10 + c$ liefert:
$-38 = -1 - 10 + c$, also $c = -27$.
Die Funktionsgleichung lautet also
$y = -x^2 + 10x - 27$.
Wegen $-x^2 + 10x - 27 = -[x^2 - 10x + 27] = -[(x - 5)^2 + 2] = -(x - 5)^2 - 2$ liegt der Scheitel bei $S(5| - 2)$.

5.

(a)
$$\begin{array}{rl} 2s = 1 + 2 + \ldots + 99 + & \\ \underline{+99 + 98 + \ldots + 1 =} & \\ 100 + 100 + \ldots + 100 & = 100 \cdot 99 = \\ & = 9900; \end{array}$$
Also $s = 1 + \ldots + 99 = \frac{9900}{2} = 4950$.

(b)
$$\begin{array}{rcl} 2s = 1 + \ldots + x + & & \\ \underline{+x + \ldots + 1 =} & & \\ 1 + x + \ldots + 1 + x & = & (1 + x) \cdot x; \end{array}$$
also $s = 1 + \ldots + x = \frac{x(1+x)}{2}$.

(c) $y = \frac{1}{2}x(x + 1)$ hat die Nullstellen $x = 0$, $x = -1$, der Scheitel liegt also in der Mitte bei $x = -\frac{1}{2}$.
y-Wert: $y = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2} + 1) = -\frac{1}{8}$.
Also $S(-\frac{1}{2}| - \frac{1}{8})$.

6.

G: Fläche $A = ab$

N: Ähnlichkeit des ganzen Dreiecks und des schraffierten kleinen Dreiecks liefert die angegebenen Verhältnisse.

A: $b = \frac{29{,}7}{21} \cdot (21 - a)$

D: $A = ab = a \cdot \frac{29{,}7}{21} \cdot (21 - a) =$
$= a(29{,}7 - \frac{29{,}7}{21}a) = -\frac{29{,}7}{21}a^2 + 29{,}7a$.
Umbenennung $a \leftrightarrow x$, $A \leftrightarrow y$ liefert die Funktionsgl. $y = -\frac{29{,}7}{21}x^2 + 29{,}7x$.

E: Die Nullstellen liegen bei $x = 0$ und $x = 21$, Scheitel also bei $x = 10{,}5$. Da die Parabel nach unten geöffnet ist, liegt hier der höchste Punkt, d. h. hier ergibt sich der größte y-Wert (also wie gewünscht die größte Rechtecksfläche). Man wähle also $a = 10{,}5$.