9. Klasse Übungsaufgaben	**9**
Mehrstufige Zufallsexperimente	**07**

1. Von 58,6 Millionen Italienern sind etwa 300 000 deutschsprachig (vor allem Südtiroler), von 7,4 Millionen Schweizern etwa 4,7 Millionen (der Rest hat als Erstsprache z. B. Französisch, Italienisch, Rätoromanisch), von 8,2 Millionen Österreichern etwa 88,6 % (der Rest z. B. kroatisch).

   Bei einem Preisausschreiben wird zuerst ein Land ausgelost und dann aus dessen Einwohnern eine Person. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die ausgewählte Person Deutsch als Erstsprache?

   Ergäbe sich ein anderes Ergebnis, wenn man direkt aus allen Einwohnern dieser drei Länder eine Person zufällig auswählen würde?

2. In einer Urne befinden sich 30 Kugeln, davon 12 rote, der Rest schwarze.

   (a) Man zieht viermal mit Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nur rote Kugeln zu ziehen?

   (b) Man zieht aus dieser Urne zweimal ohne Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nur rote Kugeln zu ziehen?

   (c) Man zieht aus der Urne dreimal ohne Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, immer abwechselnd die jeweils andere Farbe zu ziehen?

   (d) Wie viele der 30 Kugeln müssten rot sein, damit die Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe (a) etwa 50 % beträgt?

   (e) Wie viele der 30 Kugeln müssten rot sein, damit die Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe (b) etwa 50 % beträgt?

3. Ein dreiziffrige Zufallszahl (im Bereich von 000 bis 999) wird ermittelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält sie mindestens zwei gleiche Ziffern?

   Viele Taschenrechner können solche Zufallszahlen mit einer RANDOM oder RAN-Taste liefern. Führe das Experiment 25-mal durch. Wie viele Ergebnissse mit mindestens zwei gleichen Ziffern sind zu erwarten?

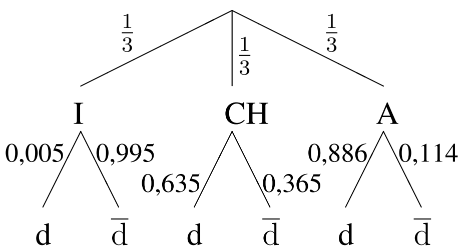
4. Hinter einem Sportplatz befindet sich ein Haus mit einem großen und einem kleinen zum Platz hin zeigenden Fenster. Die Wahrscheinlichkeit, dass im Laufe eines Fußballspiels die große Scheibe (Reparaturkosten 150 Euro) zertrümmert wird, betrage 0,2 %, für die kleine Scheibe (110 Euro) 0,1 %. Im Falle eines Schadens werden bis zur Reparatur keine Spiele durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach 7 Spieltagen die Reparaturkosten mehr als 1000 Euro betragen?

5. Aus einer Urne (2 rote, 3 schwarze Kugeln) wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis die zweite schwarze Kugel gezogen wurde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies beim dritten Zug der Fall?

6. Beim Känguru-Wettbewerb der Mathematik sind 30 Fragen zu beantworten, wobei jeweils 5 Antwortmöglichkeiten vorgegeben sind. Erscheint die Annahme plausibel, dass die 361 513 Teilnehmer der Klassen 5–13 im Jahr 2006 alle nur auf gut Glück angekreuzt haben, wenn 14 von ihnen volle Punktezahl erhielten?

9. Klasse Lösungen — 9
Mehrstufige Zufallsexperimente — 07

1.



Für Italien (I) ist die Wahrscheinlichkeit, eine deutschspachige (d) Person auszulosen, $\frac{300\,000}{58{,}6\cdot 10^6} \approx 0{,}005$ (für nicht-deutschsprachig ($\overline{\mathrm{d}}$) also $1 - 0{,}005 = 0{,}995$), für die Schweiz (CH) $\frac{4{,}7}{7{,}4} \approx 0{,}635$, für Österreich (A) $0{,}886$.
Für das zu betrachtende Ereignis E gilt also $P(E) \approx \frac{1}{3} \cdot 0{,}005 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}635 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}886 \approx 0{,}51$

Wählt man dagegen aus allen $58{,}6 + 7{,}4 + 8{,}2 = 74{,}2$ Millionen Einwohnern eine der $0{,}3 + 4{,}7 + 0{,}886 \cdot 8{,}2 = 12{,}3$ Millionen deutschsprachigen Personen aus, so ergibt sich eine andere Wahrscheinlichkeit von $\frac{12{,}3}{74{,}2} \approx 0{,}17$.

2. (a) $P(E_1) = \frac{12}{30} \cdot \frac{12}{30} \cdot \frac{12}{30} \cdot \frac{12}{30} = 0{,}0256$ (b) $P(E_2) = \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = 0{,}1517$
   (c) $P(E_3) = P(„\mathrm{r\bar{r}r}“) + P(„\mathrm{\bar{r}r\bar{r}}“) = \frac{12}{30} \cdot \frac{18}{29} \cdot \frac{11}{28} + \frac{18}{30} \cdot \frac{12}{29} \cdot \frac{17}{28} = 0{,}248$
   (d) Sei x die Zahl der roten Kugeln. Dann soll gelten:
   $P(E_4) = (\frac{x}{30})^4 \approx 0{,}50$; $\frac{x}{30} \approx \sqrt[4]{0{,}50} = 0{,}50^{\frac{1}{4}} = 0{,}841$, also $x \approx 0{,}841 \cdot 30 \approx 25$.
   (e) Sei x die Zahl der roten Kugeln. Dann soll gelten:
   $P(E_5) = \frac{x}{30} \cdot \frac{x-1}{29} \approx 0{,}50$. Ausmultiplizieren ergibt die quadratische Gleichung $x^2 - x = 0{,}50 \cdot 30 \cdot 29$, also $x^2 - x - 435 = 0$ mit den Lösungen $x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 1\cdot 435}}{2}$, wobei nur die Lösung $x_1 \approx 21{,}36 \approx 21$ sinnvoll ist.

3. Arbeite mit dem Gegenereignis:
   $P(„\text{Mind. zwei gleiche}“) = 1 - P(„\text{Lauter verschiedene}“) = 1 - \overset{\text{1. Ziffer egal}}{1} \cdot \overset{\text{2. Ziffer: Nicht die erste}}{\frac{9}{10}} \cdot \frac{8}{10} = 0{,}28$.
   Bei 25 Versuchen sind also $25 \cdot 0{,}28 \approx 7$ Ergebnisse mit mindestens zwei gleichen Ziffern zu erwarten.
   Zeigt der Taschenrechner z. B. 0,694; 0,999; 0,099; 0,731; 0,121; 0,871; 0,960; 0,910; 0,905; 0,263; 0,678; 0,625; 0,754; 0,245; 0,135; 0,109; 0,734; 0,050; 0,686; 0,937; 0,979; 0,685; 0,173; 0,115; 0,304, so wären 6 solche Ergebnisse zu verzeichnen gewesen (aber hier hat natürlich jeder, da es sich um Zufallszahlen handelt, andere Daten!).

4. Über 1000 Euro Reparaturkosten entstehen, wenn jeden Tag die große Scheibe kaputt geht oder an sechs Tagen die große und an einem Tag die kleine.
   Denkt man sich ein Baumdiagramm (7-stufiges Zufallsexperiment, jeweils drei Äste: große Scheibe/kleine Scheibe/keine Scheibe), so erkennt man:
   $P(E) = P(„\text{ggggggg}“) + P(„\text{ggggggk}“) + P(„\text{gggggkg}“) + \ldots + P(„\text{kgggggg}“) =$
   $= 0{,}002^7 + 7 \cdot 0{,}002^6 \cdot 0{,}001 = 5{,}76 \cdot 10^{-19}$.

5. $P(E) = P(„\text{rss}“) + P(„\text{srs}“) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}4$.

6. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilnehmer auf gut Glück alle 30 Fragen richtig beantwortet, beträgt $(\frac{1}{5})^{30} = 1{,}07 \cdot 10^{-21}$, so dass auch bei 361 513 Teilnehmern keiner mit voller Punktezahl zu erwarten wäre. Bei 14 solchen Ergebnissen kann man also davon ausgehen, dass es sich nicht um reine Glücktreffer handelt.