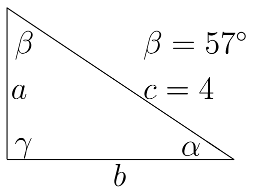
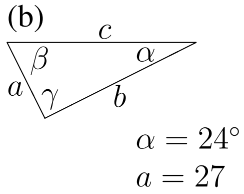
9. Klasse Übungsaufgaben	9
sin, cos, tan im rechtwinkligen Dreieck	**08**

1. Berechne die fehlenden Streckenlängen und Winkel (Taschenrechner, zwei Dezimalen) in den folgenden Dreiecken ($\gamma = 90°$):

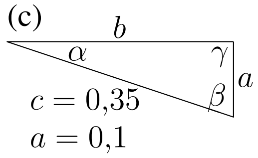
(a)



(b)

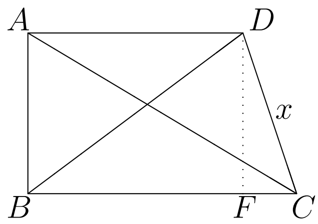


(c)



2. Die Geraden $g : y = 3{,}5 - \frac{1}{3}x$, $h : y = 2x$ und die y-Achse begrenzen ein Dreieck.
   (a) Überlege mit Hilfe der Skizze des Steigungsdreiecks, wie der Neigungswinkel der Geraden berechnet werden kann.
   (b) Berechne die Winkel in diesem Dreieck.

3. Die Länge einer unzugänglichen Strecke x soll berechnet werden:
   $\overline{AB} = 7$ m,
   $\sphericalangle CBA = 90°$, $\beta = \sphericalangle DBA = 50°$,
   $\sphericalangle BAD = 90°$, $\alpha = \sphericalangle BAC = 56°$

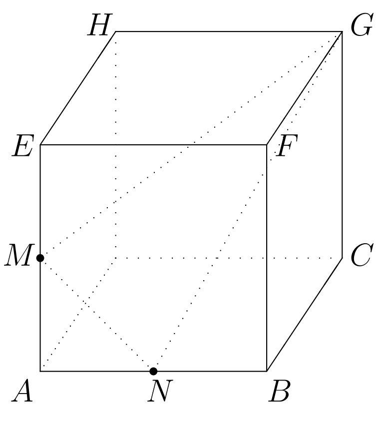


4. Mit bloßem Auge können am Nachthimmel Lichtpunkte unter einem Blickwinkel von $4'$ (Winkelminuten) getrennt gesehen werden. Der Jupiter ist ca. 800 Millionen km von der Erde entfernt. Welche Monde könnten dann theoretisch (wenn sie hell genug wären) noch getrennt vom Jupiter wahrgenommen werden:

   Io (Bahnradius, d. h. Entfernung vom Jupiter 421 000 km), Europa (672 000 km), Ganymed (1 072 000 km), Kallisto (1 888 000 km).

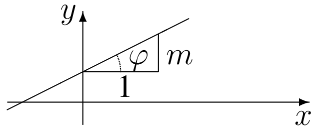
5. Berechne $1 + \tan^2\alpha$ für $\alpha = 30°$ und $\alpha = 45°$ exakt,
   (a) indem Du zunächst $\tan\alpha$ für diese Winkel ermittelst,
   (b) indem Du zunächst diesen Term vereinfachst.

6. Die Punkte M und N sind Mittelpunkte der Kanten $[AE]$ und $[AB]$ eines Würfels mit Kantenlänge a.
   Berechne den Winkel $\mu = \sphericalangle NMG$.
   Hinweis: Suche zunächst andere Dreiecke, mit deren Hilfe sich Streckenlängen des Dreiecks MNG berechnen lassen.

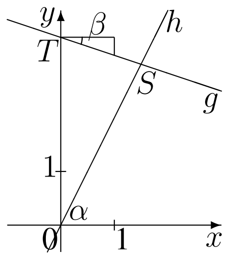


9. Klasse Lösungen	**9**
sin, cos, tan im rechtwinkligen Dreieck	**08**

1. (a) $\alpha = 180° - \gamma - \beta = 180° - 90° - 57° = 33°$ (Winkelsumme im Dreieck)
$\sin\beta = \frac{b}{c}$, also $b = c\sin\beta = 4\sin 57° \approx 3{,}35$
$\cos\beta = \frac{a}{c}$, also $a = c\cos\beta = 4\cos 57° \approx 2{,}18$ (oder Pythagoras: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$)
(b) $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 24° = 66°$
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, also $c = \frac{a}{\sin\alpha} \approx 66{,}38$; $\tan\alpha = \frac{a}{b}$, also $b = \frac{a}{\tan\alpha} \approx 60,64$
(c) $a^2 + b^2 = c^2$, also $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{0{,}35^2 - 0{,}1^2} \approx 0{,}34$
$\sin\alpha = \frac{a}{c} \approx 0{,}29$, also $\alpha \approx 16{,}60°$; $\cos\beta = \frac{a}{c} \approx 0{,}29$, also $\beta \approx 73{,}40°$

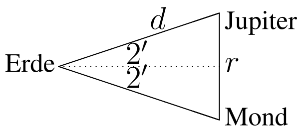
2. (a) 

Die Gerade $y = mx + t$ mit Steigung m hat als Steigungsdreieck „1 nach rechts, m nach oben". Man liest dort ab: $\tan\varphi = \frac{m}{1} = m$.

(b) 

Für Gerade h folgt wegen der Steigung $m = 2$ aus $\tan\alpha = 2$ ein Neigungswinkel $\alpha \approx 63{,}43°$.
Somit ist $\sphericalangle SOT = 90° - \alpha \approx 26{,}57°$.
Für Gerade g folgt wegen des Steigungsdreiecks (3 nach rechts, 1 nach unten) aus $\tan\beta = \frac{1}{3}$ ein Winkel $\beta \approx 18{,}43°$.
Somit ist $\sphericalangle OTS = 90° - \beta \approx 71{,}57°$.
Winkelsumme im Dreieck: $\sphericalangle TSO \approx 81{,}86°$

3. ΔABC: $\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, also $\overline{BC} = \overline{AB}\tan\alpha \approx 10{,}38$
ΔABD: $\tan\beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$, also $\overline{AD} = \overline{AD}\tan\beta \approx 8{,}34$
Pythagoras im ΔDFC: $x = \sqrt{\overline{DF}^2 + \overline{FC}^2} \approx \sqrt{7^2 + (\overline{BC} - \overline{AD})^2} \approx 7{,}29$

4. 

Halbiert man nebenstehendes gleichschenkliges Dreieck, so erkennt man: $\sin 2' = \frac{r/2}{d}$, somit ergibt sich als Entfernung r von noch getrennt wahrnehmbaren Lichtpunkten:
$r = 2d\sin 2' = 2 \cdot 800 \cdot 10^6 \cdot \sin(\frac{2}{60})°$ km $\approx 930\,000$ km.
Somit könnten theoretisch Ganymed und Kallisto noch getrennt gesehen werden.

5. Es ist $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin 60° = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
(a) $\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1$
$1 + \tan^2 30° = 1 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4}{3}$; $1 + \tan^2 45° = 2$
(b) $1 + \tan^2\alpha = 1 + (\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})^2 = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
$1 + \tan^2 30° = \frac{1}{\cos^2 30°} = \frac{1}{(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \frac{4}{3}$; $1 + \tan^2 45° = \frac{1}{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = 2$

6. ΔEMG: Rechter Winkel bei E; $\overline{EG} = \sqrt{2}a$ (Diagonale im Quadrat → grund93.pdf).
Pythagoras also: $\overline{MG} = \sqrt{\overline{ME}^2 + \overline{EG}^2} = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2a^2} = 1{,}5a$.
Ebenso ΔNBG: $\overline{NG} = 1{,}5a$. Also ist ΔMNG gleichschenklig.
Ferner: $\overline{MN} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a$ (denn $[MN]$ ist Diagonale eines Quadrats mit Seitenlänge $\frac{a}{2}$).
Sei L der Mittelpunkt von $[MN]$. Dann ist $\overline{ML} = \frac{1}{2}\overline{MN} = \frac{1}{4}\sqrt{2}a$.
ΔMLG: $\cos\mu = \frac{\overline{ML}}{\overline{MG}} = \frac{0{,}25\sqrt{2}a}{1{,}5a} = \frac{1}{6}\sqrt{2}$. Somit $\mu \approx 76{,}37°$.