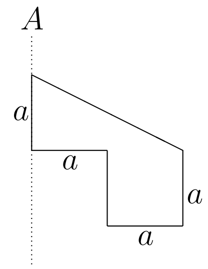
9. Klasse Übungsaufgaben	9
Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel	**09**

1. Berechne Volumen und Oberfläche, wenn der Körper jeweils die Höhe $h = 5$ cm hat:
   (a) Prisma mit gleichschenkligem Dreieck als Grundfläche, Schenkellänge 3 cm, Basis 2 cm.
   (b) Zylinder mit Radius $r = 3$ cm.
   (c) Gerade Pyramide (d. h. alle Seitenkanten gleich lang) mit Quadrat der Kantenlänge 24 cm als Grundfläche.
   (d) Kegel mit Radius $r = 3$ cm.

2. Die nebenstehende Figur rotiert um die Achse A. Berechne das Volumen Rotationskörpers in Abhängigkeit von a.



3. Ein Kegel, dessen Höhe h so groß ist wie der Grundkreis-Durchmesser, habe das Volumen 1 Liter. Berechne h.

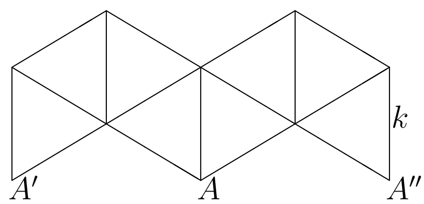
   Berechne ferner den Öffnungwinkel α des Sektors, aus dem dieser Kegel gefertigt werden kann.

4. Eine Pyramide habe als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit Umkreisradius r (gemäß ueb93.pdf, Aufgabe 4a, ist dann die Grundkantenlänge ebenfalls r und der Inkreisradius $\frac{\sqrt{3}}{2}r$). Der Höhenfußpunkt der Pyramide sei der Umkreismittelpunkt, die Seitenkantenlänge sei $2{,}6r$.

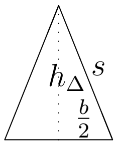
   Berechne das Volumen der Pyramide. Berechne den Neigungswinkel der Seitenkante zur Grundfläche und den Neigungswinkel der Seitenfläche zur Grundfläche.

5. Berechne das Volumen eines Kegelstumpfs mit Höhe 2, „oberem“ Radius 3 und „unterem“ Radius 5.

6. Das nebenstehende Netz mit lauter gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge k lässt sich zu einem Oktaeder falten, indem man zunächst aus der „linken“ Hälfte des Netzes eine Pyramide herstellt. Berechne die Höhe dieser Pyramide und zeichne ein Schrägbild der Oktaeders.

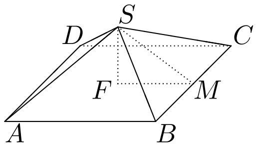


# 9. Klasse Lösungen	9
Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel	**09**

1. (a) 

Mit Pythagoras berechnet man die Höhe h_Δ des Grundflächen-Dreiecks: $h_\Delta = \sqrt{s^2 - (\frac{b}{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. (Alle Maße in cm.)
Also $G = \frac{1}{2}bh_\Delta = 2\sqrt{2}$; $V = Gh = 2\sqrt{2} \cdot 5 = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$.
$O = 2G + uh = 2 \cdot 2\sqrt{8} + (3 + 3 + 2) \cdot 5 = 40 + 4\sqrt{2} \approx 45{,}7$.

(b) $V = r^2\pi h = 3^2\pi \cdot 5 = 45\pi \approx 141{,}4$.
$O = 2r\pi h + 2r^2\pi = 2 \cdot 3\pi \cdot 5 + 2 \cdot 3^2\pi = 48\pi \approx 150{,}8$

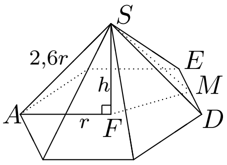
(c) 

$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot 5 = 960$
Höhe $h_\Delta = \overline{SM}$ des Seitenflächen-Dreiecks aus dem Stützdreieck FMS: $\overline{MS} = \sqrt{\overline{FM}^2 + \overline{SF}^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.
$O = 4A_\Delta + G = 4 \cdot \frac{1}{2}\overline{BC}h_\Delta + G = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 13 + 24^2 = 1200$.

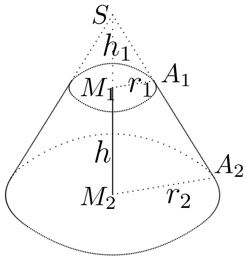
(d) $V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{1}{3} \cdot 3^2\pi \cdot 5 = 15\pi \approx 47{,}1$; $\quad m = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{34}$
$O = \pi rm + r^2\pi = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{34} + 3^2\pi = (3\sqrt{34} + 9)\pi \approx 83{,}2$

2. Der Körper setzt sich zusammen aus einem Kegel mit Radius $r_K = 2a$ und Höhe $h_K = a$ plus einem großen Zylinder mit Radius $R_Z = 2a$ und Höhe $H_Z = a$ minus einem kleinen Zylinder mit Radius $r_Z = a$ und Höhe $h_z = a$:
$V = \frac{1}{3}r_K^2\pi h_K + R_Z^2\pi H_Z - r_Z^2\pi h_Z = \frac{1}{3}(2a)^2\pi a + (2a)^2\pi a - a^2\pi a = \frac{13}{3}a^3\pi$

3. $r = \frac{h}{2}$. $\quad V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{1}{3}(\frac{h}{2})^2\pi h = \frac{\pi}{12}h^3 = 1$ dm³, also $h = \sqrt[3]{\frac{12}{\pi}}$ dm $\approx 15{,}6$ cm.
Aus „Bogenlänge gleich Grundkreisumfang“, $b = \frac{\alpha}{360°}2m\pi = 2r\pi$, folgt mit $r = \frac{h}{2}$ und $m = \sqrt{h^2 + (\frac{h}{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}h$: $\quad \frac{\alpha}{360°} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}h = \frac{h}{2}$, also $\alpha = \frac{360°}{\sqrt{5}} \approx 161°$.

4. 

Stützdreieck AFS: $h^2 + r^2 = (2{,}6r)^2$, also $h^2 = 5{,}76r^2$, $h = 2{,}4r$.
Die Grundfläche G besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken mit Fläche $A_\Delta = \frac{1}{2}\overline{DE} \cdot \overline{FM} = \frac{1}{2}r\frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$. Also
$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 \cdot 2{,}4r = 1{,}2\sqrt{3}r^3$.
Winkel $\varphi = \sphericalangle FAS$ der Seitenkante zur Grundfläche aus dem Stützdreieck FAS:
$\cos\varphi = \frac{\overline{AF}}{\overline{AS}} = \frac{r}{2{,}6r} \approx 0{,}385$, also $\varphi \approx 674°$.
Seitenflächen-Winkel $\psi = \sphericalangle FMS$ aus ΔFMS: $\tan\psi = \frac{\overline{FS}}{\overline{FM}} = \frac{2{,}4r}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \approx 2{,}77$; $\psi \approx 70{,}2°$.

5. 

Ergänzt man den Kegelstumpf zu einem Kegel, so erhält man ähnliche Dreiecke: Die Strecken im Dreieck M_1A_1S verhalten sich wie die entsprechenden Strecken im Dreieck M_2A_2S: $\frac{r_1}{h_1} = \frac{r_2}{h+h_1}$.
Kreuzweise multiplizieren: $r_1(h + h_1) = r_2h_1$
$r_1h + r_1h_1 = r_2h_1$; $r_1h = r_2h_1 - r_1h_1$; $h_1 = \frac{r_1h}{r_2 - r_1} = \frac{3 \cdot 2}{5 - 3} = 3$
$V_{\text{K.stumpf}} = V_{\text{ganzer K.}} - V_{\text{oberer K.}} = \frac{1}{3}r_2^2\pi(h + h_1) - \frac{1}{3}r_1^2\pi h_1 \approx 102{,}6$

6. Eine aus dem „halben“ Netz hergestellte Pyramide hat quadratische Grundfläche mit Diagonalenlänge $\sqrt{2}k$, also ergibt sich im eingezeichneten Stützdreieck mit Pythagoras: $(\frac{\sqrt{2}k}{2})^2 + h^2 = k^2$, somit $h = \sqrt{\frac{1}{2}}k \approx 0{,}71k$.