



Übungsaufgaben weitere Themen (alter LP)	W
L'Hospitalsche Regel	07

1. Berechnen Sie mit L'Hospital, sofern möglich:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (1 - \cos 2x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x + 3}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$

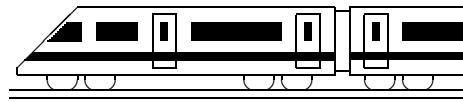
2. In der 12. Klasse werden Sie den Funktionsterm e^x kennenlernen mit Ableitung e^x und $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \rightarrow \infty$. Berechnen Sie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$$

3. Zeigen Sie am Beispiel von

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x}},$$

dass die Anwendung des Satzes von L'Hospital nicht immer die vorteilhafteste Methode ist. Welche Methode bietet sich dagegen hier an?



Lösungen weitere Themen (alter LP)	W
L'Hospitalsche Regel	07

1. (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3}{3x^2} = \frac{4}{3}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x}{2} = 2$
- (c) Hier liegt nicht die Situation $\frac{0}{0}$ vor. L'Hospital ist daher nicht anwendbar. Sondern:
- $$\lim_{x \rightarrow -3 \pm 0} \frac{x^2 - 6x + 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3 \pm 0} \frac{(x - 3)^2}{x + 3} = \frac{+36}{\pm 0} \rightarrow \pm \infty$$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3 \cos 3x}{2 \cos 2x} = \frac{3 \cdot (-1)}{2 \cdot 1} = -\frac{3}{2}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4-x}} \cdot (-1) - \frac{1}{2\sqrt{4+x}}}{1} = -\frac{1}{2}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x}{\sin x} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (-\sin x) + 1 \cdot \cos x}{\cos x} = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} \rightarrow \infty$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{2\sqrt{x^2 - x}}(2x - 1)} = \frac{4}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x}}}$

Vorausgesetzt, der Grenzwert existiert, kann man beide Seiten der Gleichung mit diesem \lim -Ausdruck multiplizieren und erhält, dass das Quadrat des Grenzwertes gleich 4 ist, der Grenzwert selbst also $+2$ oder -2 .

Wesentlich günstiger ist folgende Methode: Man kürzt mit x und erhält:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = 2$$

(Man beachte dabei, dass im Nenner $\frac{1}{x}$ beim „unter-die Wurzel-ziehen“ zu $\frac{1}{x^2}$ wird.)